中国科学技术大学
2022–2023学年实分析期中考试

姓名：______________ 学号：______________

1. （20分）判断正误（证明或者举反例说明你的结论）：

   (i) 区间上的单调函数可测.

   (ii) $\mathbb{R}^n$ 中每个闭集都是 G_δ 集.

2. （15分）设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为实值函数. 证明以下两说法等价:

   (i) $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((a,+\infty))$ 为 Lebesgue 可测集;

   (ii) 对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 G, $f^{-1}(G)$ 为 Lebesgue 可测集.

3. （10分）计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx.$$

4. （15分）设 $f, f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ 非负可测且 $f_n\to f$ a.e. on $[a,b]$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f_n e^{-f_n}dm=\int_{[a,b]}fe^{-f}dm.$$

5. （15分）若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则存在包含 E 的 G_δ 集 H, 使得 $m(H)=m_*(E)$.

6. （15分）设 $E_1,E_2,\ldots,E_n$ 是 $[0,1]$ 的可测子集, 且 $[0,1]$ 上的每个点至少在其中的 k 个子集中出现. 证明: $\exists i_0$, 使得 $m(E_{i_0})\geq k/n$。

7. （10分）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测, $V\subset\mathbb{R}$ 是开集, $0\in V$. 证明: 存在可测集 E, $m(E)>0$, 使得对任何 $x,y\in E$ 都有 $f(x)-f(y)\in V$.