2023 年春刘聪文实分析期中考试

1. (20 分) 判断正误 (证明或者举反例证明你的结论)
   (a) 连续函数可测。
   (b) 可积函数几乎处处有限。
2. (15 分) 叙述 Fatou 引理并举例说明其中严格不等式的情况可能发生。
3. (20 分) 计算
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}\,\mathrm{d}\,x$;
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$.
4. (15 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一一映射，且保持点集的外测度不变。
   证明：对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f(E)$ 可测。
5. (10 分) 叙述并证明 Borel-Cantelli 引理。
6. (10 分) 设 $f, f_n \in L^1, n=1,2,\cdots$ 满足 $f_n\to f$ a.e.，并且
   $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_n|\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\mathrm{d}m.$$
   证明：对于任何可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$,
   $$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n|\mathrm{d}m=\int_E|f|\mathrm{d}m.$$
7. (10 分) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，$m(E)<+\infty$，f 在 E 上非负可测。对于 $\varepsilon>0$, 定义
   $$E_k(\varepsilon):=\{x\in E: k\varepsilon\le f(x)<(k+1)\varepsilon\}, k=1,2,\cdots$$
   和
   $$A(\varepsilon):=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}km(E_k(\varepsilon)).$$
   证明：
   $$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{\varepsilon\to0}A(\varepsilon).$$