2020期末

以下均省略a.e.

1.如果f 是R^d上的实值可积函数,并且对于任意的可测集E,

$$\int_E f(x)dx \geq 0$$

证明$f \geq 0$

Proof. *令$E = (x|f(x) < 0)$,则假设结论不成立,那么我们有$m(E) > 0$,考虑f在E上的积分*

$$\int_E f(x)dx < 0$$

与题设矛盾.

2.判断下面命题是否正确,如果正确,不需要给出证明,如果错误,请给出反例.

(1).如果E是$R^{d_1} \times R^{d_2}$中的可测集,则对于几乎处处的$y \in R^{d_2}$,

$$E^y = (x \in R^{d_1} : (x, y) \in E)$$

是R^{d_1}上的可测集

(2)如果对于几乎处处的的$y \in R^{d_2}$,E^y是R^{d_2}中的可测集,则E是$R^{d_1} \times R^{d_2}$中的可测集

Proof. *(1)正确*

(2)错误

如果用N表示R的一个不可测子集,定义$E = [0, 1] \times N$,则容易验证E_y几乎处处可测,但E不可测

6.令m表示R上的lebesgue测度,A $\subset R$是Lebesgue可测集,假设对于所有的实数$a < b$,

$$m(A \cap [a, b]) < \frac{b-a}{2}.$$

证明m(A)=0.

Proof. *由于几乎每个A中的点都是A的密度点,但对于每个$x \in A$我们有*

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(A \cap [x-r, x+r]}{m([x-r, x+r])} < \frac{1}{2}$$

,即A中点的均不是A的密度点,即$m(A)=0$

7.若f在R上绝对连续,且$f \in L^1(R)$.如果

$$\lim_{t\to 0}\int_R |\frac{f(x+t)-f(x)}{t}|dx = 0$$

,

证明:$f = 0$

Proof. 我么知道$\lim_{t\to 0}\frac{\int_a^{a+t} f(x)dx}{t} = f(a)$,我们下面证明

$$\lim_{t\to 0}\int_a^{a+h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dx = f(a+h)-f(a)$$

如该式成立,根据题设我们可以得到f是一个常值函数,再根据f的可积性,可以得到$f = 0$

明

$$\lim_{t\to 0}\int_a^{a+h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dx = \lim_{t\to 0}(\int_a^{a+h}\frac{f(x+t)}{t}dx - \int_a^{a+h}\frac{f(x)}{t}dx)$$

$$= \lim_{t\to 0}(\int_{a+t}^{a+t+h}\frac{f(x)}{t}dx - \int_a^{a+h}\frac{f(x)}{t}dx) = \lim_{t\to 0}(\int_{a+h}^{a+t+h}\frac{f(x)}{t}dx - \int_a^{a+t}\frac{f(x)}{t}dx)$$

$$= f(a+h)-f(a)$$