2019期末

以下均省略a.e.

2.判断对错(错误的给出反例,正确的给出简要证明)

(a)设f在$[a,b]$上单调递增且几乎处处可微,则

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

(b)设E是R^n中的可测集,则对几乎处处的$x \in E$有

$$\lim_{m(B)\to 0} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1$$

其中B为包含x的球

Proof. *(a)*错误

取$f(x) = -\chi_{[a,\frac{a+b}{2}]}$,则$\int_a^b f'(x)dx = 0$但$f(b) - f(a) = 1$

*(b)*正确

由于$\lim_{m(B)\to 0, x\in B} \frac{\int_B f(y)dy}{m(B)} = f(x)$,取$f$为$E$的特征函数即可

3.设$f \in L^1(R)$.计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x-n)\frac{x}{1+|x|}dx$$

Proof. 根据积分平移的性质,有

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x-n)\frac{x}{1+|x|}dx = \lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}dx$$

由于$|f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}| < |f(x)|$,且$\lim_{n\to\infty} f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|} = f(x)$,根据控制收敛定理,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x-n)\frac{x}{1+|x|}dx = \lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\frac{x+n}{1+|x+n|}dx = \int_R f(x)dx$$

4.设f和g是(0,1)上的非负实值可测函数,满足对任意的$\alpha > 0$都有$m(x \in (0,1) : f(x) > \alpha) = m(x \in (0,1) : g(x) > \alpha)$,证明

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

Proof. 根据*stein*习题*3.19(*证明见我之前习题课讲义*)*我们有$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\infty m(E_{\alpha 1})d\alpha$,$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^\infty m(E_{\alpha 2})d\alpha$其中$E_{\alpha 1} = (x \in (0,1) : f(x) > \alpha)$, $E_{\alpha 2} = (x \in (0,1) : g(x) > \alpha)$,再根据题设$m(E_{\alpha 1}) = m(E_{\alpha 2})$,故

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

5.证明函数

$$f(x) = x^2 cos\frac{1}{x^2}\chi_{(0,1]}$$

在$[0,1]$上不是有界变差的

Proof. 我们取$x_i = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} i = 1, 2...n-1, x_0 = 1, x_n = 0$,则由于$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \frac{1}{4n}$*(*这里我们直接去掉*i=0,n-1*的情况*)*,我们可以得到f在$[0,1]$上的全变差大于$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4i}$,令$n \to \infty$即可

6.设R上实值函数f满足

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{|x|+|y|}|x-y|, x, y \in R$$

证明f把零测集映到零测集

Proof. 设E是给定的零测集,记$E_n = E \cap [n, n+1]$则$E = \cup_{-\infty}^{\infty} E_n$,我们只需要证明*f*把每一个$E_n$都映射到零测集即可,在每个$E_n$上,$e^{|x|+|y|}$都有上界$M_n$,此时

$$|f(x) - f(y)| \leq M_n|x-y|$$

,根据上式可以得到对于每个开区间*(a,b)*,都有$m(f((a,b))) \leq M_n(b-a)$,再根据开区间结构定理,对于每个开集*O*,$m(f(O)) \leq M_n m(O)$,则对于任意$\varepsilon > 0$,我们取开集$O$使得$E_n \subset O, m(O) < \varepsilon$,则$m(f(E_n)) < m(f(O)) \leq M_n\varepsilon$令$\varepsilon \to 0$即可得到*f*把每一个$E_n$都映射到零测集,再利用零测集的可数并还是零测集即可.

7.设$E \subset R$可测,m(E)> 0,令

$$f(x) = \int_R \chi_E(tx)\chi_E(t)dt$$

证明f在x=1处连续

Proof. 我们先证明如下结论:如果f可积,那么有$\lim_{t\to 1}\int_R |f(tx)-f(x)| = 0$,由于连续函数在$L_1$空间中稠密,故对于任意$\varepsilon > 0$,我们可以找到一个连续函数$g$,使得$|f-g|_{L^1} < \varepsilon$成立,则此时

$$\int_R |f(tx)-f(x)| < \int_R |f(tx)-g(tx)| + \int_R |g(x)-g(tx)| + \int_R |f(x)-g(x)| \quad (1)$$

并且有$\lim_{t\to 1}\int_R |g(x)-g(tx)| = 0, \int_R |f(tx)-g(tx)| = \frac{\int_R |f(x)-g(x)|}{t}$,我们在*(1)*中令$t \to 1$,可以得到$\lim_{t\to 1}\int_R |f(tx)-f(x)| < 2\varepsilon$,再令$\varepsilon \to 0$即可

回到原题

$$\lim_{x\to 1} |(f(x)-f(1))| \leq \lim_{x\to 1}\int_R |\chi_E(tx)-\chi_E(t)||\chi_E(t)| \leq \lim_{x\to 1}\int_R |\chi_E(tx)-\chi_E(t)|$$

,我们取上面的f为$\chi_E(t)$,有$\lim_{x\to 1} |(f(x)-f(1))| = 0$,即$f$在*x=1*处连续