第五章 数据压缩

- **定义** 关于随机变量X的信源编码C是从X的取值空间 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{D}^*$ 的一个映射，其中 $\mathcal{D}^*$ 表示D元字母表 $\mathcal{D}$ 上有限长度的字符串所构成的集合。用C(x)表示x的码字，l(x)表示C(x)的长度。
- **定义** 设随机变量X的概率密度函数为p(x)，定义信源编码C(x)的期望长度L(C)为 $$L(C) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) l(x)$$

信源编码的例子

例

$$\Pr(X=1)=1/2, \quad \text{codeword} \quad C(1)=0$$
$$\Pr(X=2)=1/4, \quad \text{codeword} \quad C(2)=10$$
$$\Pr(X=3)=1/8, \quad \text{codeword} \quad C(3)=110$$
$$\Pr(X=4)=1/8, \quad \text{codeword} \quad C(4)=111$$

$$H(X)=\frac{7}{4}\text{比特} \qquad L(C)=El(X)=\frac{7}{4}$$

信源编码的例子

- 例 中文电报的编码方式
  - 中文电报的基本编码方法是将每一个汉字或字符用4位十进制数来表示，每一个十进制数再用5位二进制数来表示。
  - 例如，“信息论”三个字的电码分别是(0207)，(1873)，(6158)。以“信”为例，首先将它编成4位十进制的码0207，再将它们变换成20位二进制的码:01101 11001 01101 11100，

$2^{20}=1048576$

常用汉字表+次常用汉字表：大约是2500到7000之间
毛泽东所有的著作仅含3136个汉字。孙中山'三民主义'用了2134个汉字。'骆驼祥子'用了2413个汉字。

信源编码的例子

- 例 摩尔斯电码：使用四个字符的字母表（点，划，字母间隔和单词间隔）

摩 尔 斯 电 码 表

字符	电码符号	字符	电码符号	字符	电码符号
A	• —	N	— •	1	• — — — —
B	— • • •	O	— — —	2	• • — — —
C	— • — •	P	• — — •	3	• • • — —
D	— • •	Q	— — • —	4	• • • • —
E	•	R	• — •	5	• • • • •
F	• • — •	S	• • •	6	— • • • •
G	— — •	T	—	7	— — • • •
H	• • • •	U	• • —	8	— — — • •
I	• •	V	• • • —	9	— — — — •
J	• — — —	W	• — —	0	— — — — —
K	— • —	X	— • • —	?	• • — — • •
L	• — • •	Y	— • — —	/	— • • — •
M	— —	Z	— — • •	( )	— • — — • —
				—	— • • • • —
				•	• — • — • —

编码的类型

- 非奇异（nonsingular）编码：

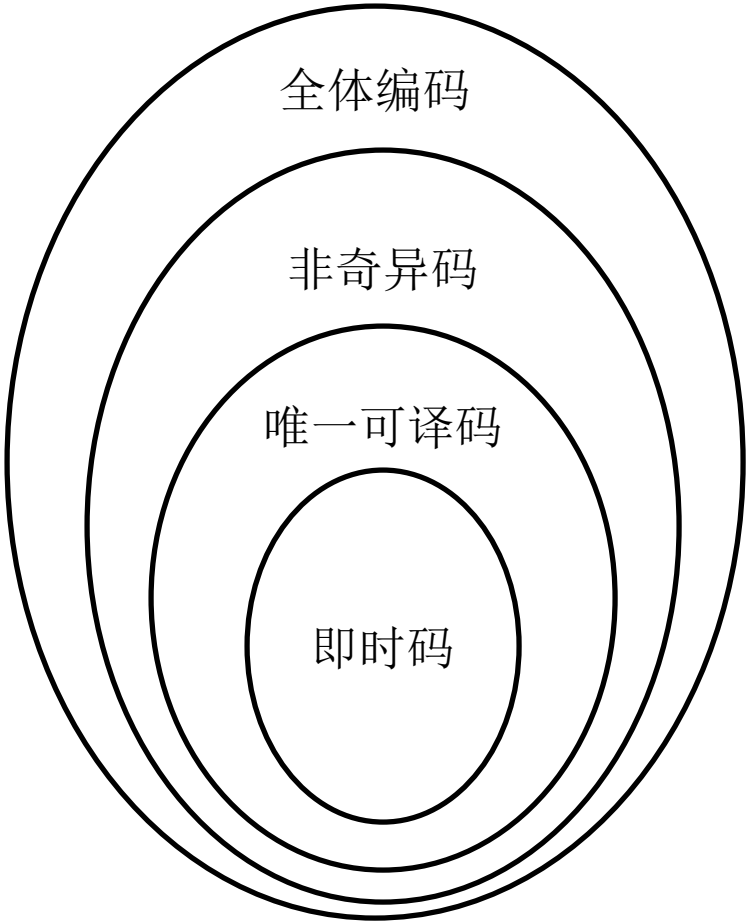
$$x \neq x' \Rightarrow C(x) \neq C(x')$$

- 扩展（extension）编码：

$$C(x_1 x_2 \cdots x_n) = C(x_1)C(x_2)\cdots C(x_n)$$

- 唯一可译（uniquely decodable）编码：扩展编码是非奇异的
- 前缀码（prefix code）或即时码（instantaneous code）：码中无任何码字是其他码字的前缀。

编码的类型



Kraft不等式

- 信源编码的目标：构造期望长度最小的即时码
- Kraft不等式：对于D元字母表上的即时码，码字长度 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 必须满足不等式

$$\sum_i D^{-l_i} \leq 1$$

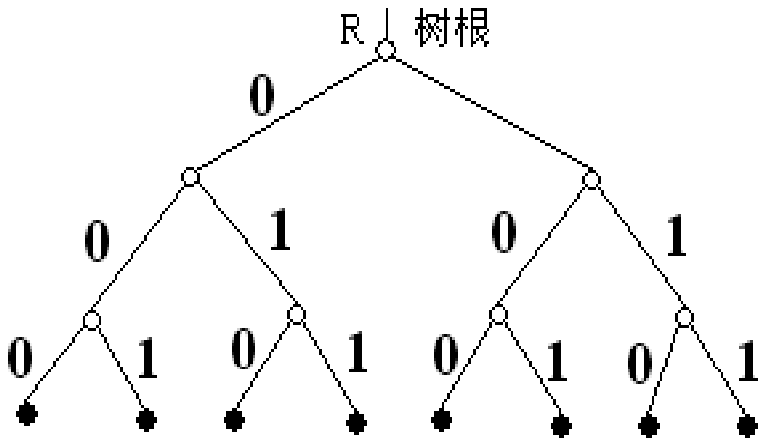
反之，若给定满足以上不等式的一组码字长度，则存在一个相应的即时码，其码字长度就是给定的长度。

- 推广的Kraft不等式：$\sum_{i=1}^{\infty} D^{-l_i} \leq 1$

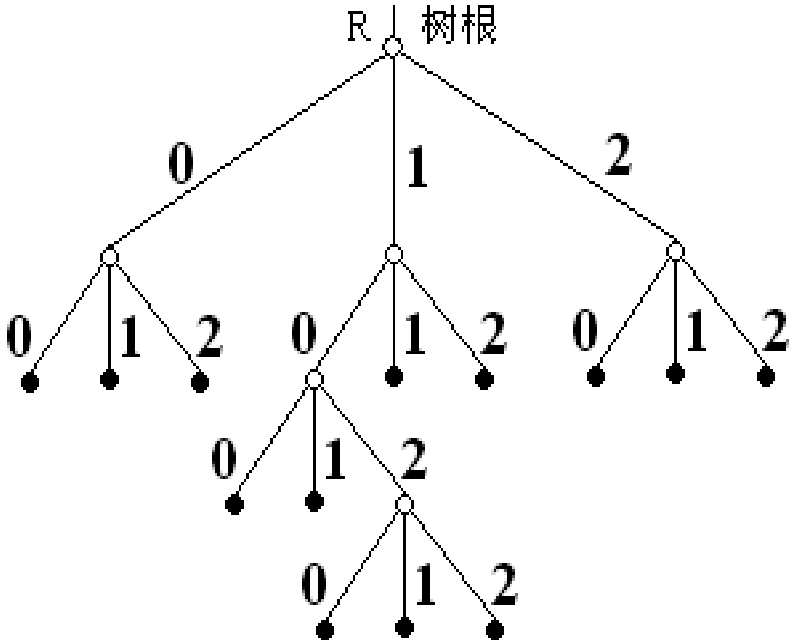
码树

- 对于给定码字的全体集合，可以用码树来描述。
- 对于r进制的码树，如下页图所示，其中图(a)为二元码树，图(b)为三元码树。在码树中R点是树根，从树根伸出个树枝，构成 r元码树。树枝的尽头是节点，一般中间节点会伸出树枝，不伸出树枝的节点为终端节点，编码时应尽量在终端节点安排码字。

码树

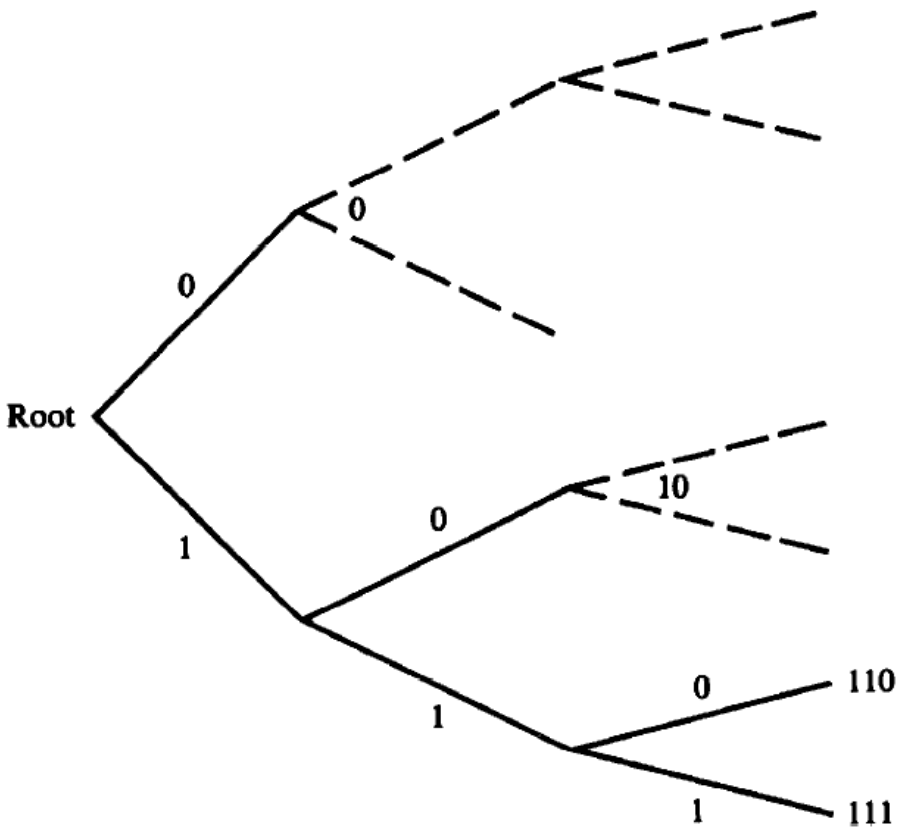


(a) 二元码树



(b) 三元码树

Kraft不等式的证明



Kraft不等式的充分必要性

- Kraft不等式是即时码存在的充要条件，其必要性表现在如果码是即时码，则必定满足Kraft不等式；充分性表现在如果满足Kraft不等式，则这种码长的即时码一定存在，但并不表示所有满足Kraft不等式的码一定是即时码。
- 因此， Kraft不等式是即时码存在的充要条件，而不是即时码的充要条件。

最优码

- 最优化问题：在所有满足 $\sum_{i=1}^{\infty} D^{-l_i} \le 1$ 整数 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 中，最小化 $L = \sum p_i l_i$
  - ✓ 取消 l_i 必须是整数的限制
  - ✓ 约束条件中的等号成立
  - ✓ 拉格朗日乘子法（Lagrange Multiplier）
- **定理** 随机变量*X*的任一*D*元即时码的期望长度

$$L \ge H_D(X)$$

当且仅当 $D^{-l_i} = p_i$，等号成立

寻找最优码

- 定义 D进制的（D-adic）概率分布：每一个概率值均等于D^{-n}
- 寻找最优码的方法
  - ✓ 找到与X的分布最接近的D进制分布（在相对熵意义下）
  - ✓ 该D进制概率分布可提供一组码字长度
  - ✓ 构造码字

最优码长的界

- **定理** 设 $l_1^*, l_2^*, \cdots, l_m^*$ 是关于信源分布p和一个D元字母表的一组最优码长，L^* 为最优码的相应期望长度，则

$$H_D(X) \leq L^* < H_D(X) + 1$$

- 多字符分组编码：

$$L_n = \frac{1}{n}\sum p(x_1, x_2, \cdots, x_n) l(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{n} El(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$\frac{H_D(X_1, X_2, \cdots, X_n)}{n} \leq L_n < \frac{H_D(X_1, X_2, \cdots, X_n)}{n} + \frac{1}{n}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布：$H_D(X) \leq L_n < H_D(X) + \frac{1}{n}$

香农第一定理

定理 香农第一定理（可变长无失真信源编码定理）

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为离散无记忆信源X的n次扩展，对n次扩展信源进行编码，平均每字符期望码长为L_n，则对任意给定的$\varepsilon>0$，当n足够大时，总可以找到一种无失真惟一可译编码，满足

$$H_D(X) \le L_n < H_D(X) + \varepsilon$$

反之，若$L_n < H_D(X)$，则信源编码不可能无失真。

不正确分布引起的误差

- **定理** 码字长度分配 $l(x)=\left\lceil \log \frac{1}{q(x)} \right\rceil$ 关于p(x)的期望码长满足

$$H(p)+D(p\|q)\le E_p l(X)<H(p)+D(p\|q)+1$$

例

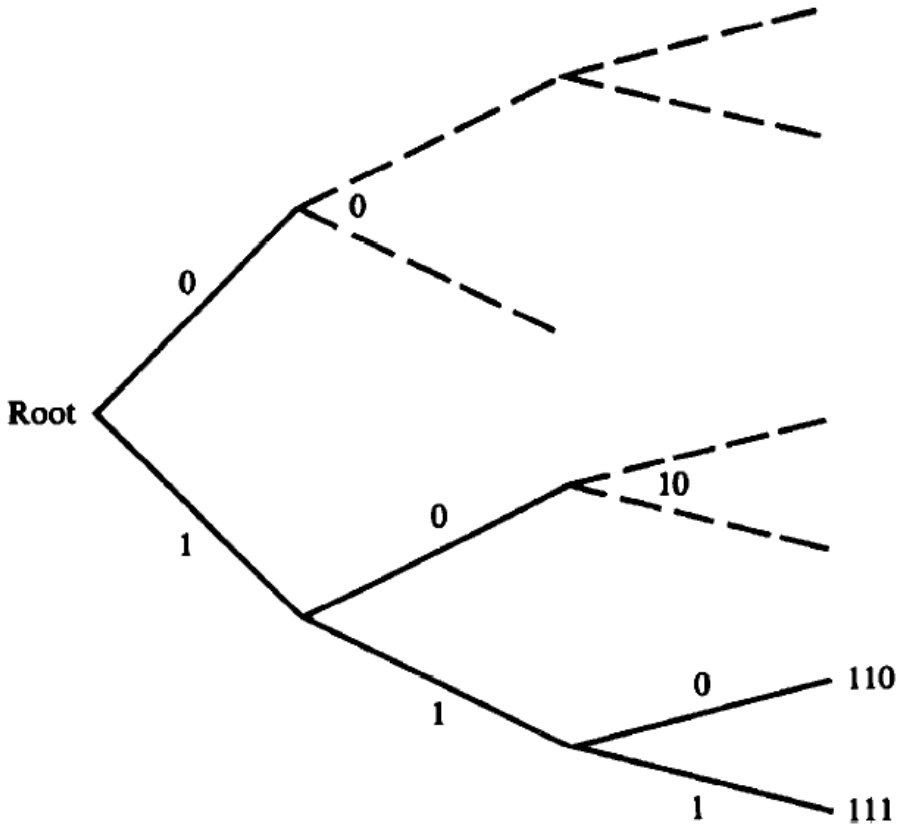
$$\begin{bmatrix} X \\ p(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ q(Y) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

$$L_p(X)=1.75\text{比特};\ L_q(X)=2\text{比特}$$

$$D(p\|q)=\sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}=0.25\text{比特}$$

构造最优即时码

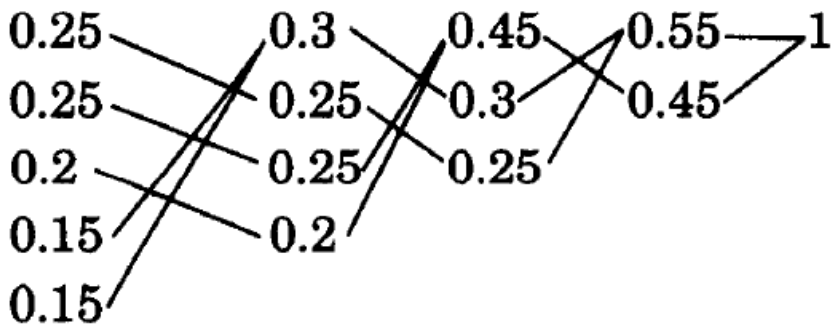


$$l(x) = \left\lceil \log \frac{1}{p(x)} \right\rceil$$

赫夫曼码

例 $D = 2$

Codeword length	Codeword	X	Probability
2	01	1	0.25
2	10	2	0.25
2	11	3	0.2
3	000	4	0.15
3	001	5	0.15



$$L = 2.3\text{比特}$$

赫夫曼码

例 $D = 3$

码字	X	概率			
12	1	0.25	0.3	0.7	1
11	2	0.25	0.25	0.3	
10	3	0.2	0.25		
02	4	0.1	0.2		
01	5	0.1			
00	6	0.1			

$L = 2$铁特（ternary digit）

赫夫曼码

例 $D = 3$

$$|\mathcal{X}| = 1 + k(D-1)$$

码字	X	概率			
12	1	0.25	0.3	0.7	1
11	2	0.25	0.25	0.3	
10	3	0.2	0.25		
02	4	0.1	0.2		
01	5	0.1			
00	6	0.1			

$L = 2$铁特（ternary digit）

赫夫曼码

例 $D = 3$

$$|\mathcal{X}| = 1 + k(D-1)$$

Codeword	X	Probability
1	1	0.25 — 0.25 — 0.5 — 1.0
2	2	0.25 — 0.25 — 0.25
01	3	0.2 — 0.2 — 0.25
02	4	0.1 — 0.2
000	5	0.1 — 0.1
001	6	0.1
002	Dummy	0.0

$L = 1.7$铁特（ternary digit）

赫夫曼码的讨论

- 加权码字的赫夫曼编码：赫夫曼算法最小化的是码长加权和 $\sum p_i l_i$

X	Codeword	Weights
1	00	5 8 10 18
2	01	5 5 8
3	10	4 5
4	11	4

赫夫曼码的讨论

- 赫夫曼编码和香农码（码字长度 $l(x) = \left\lceil \log \frac{1}{q(x)} \right\rceil$ ）
  - ✓ 从平均意义上讲，赫夫曼编码具有更短的期望长度，但两者的差别不超过1比特
  - ✓ 对于单个字符来说，香农码可能具有比赫夫曼码更短的码字长度

码字长度	码字	X	概率
1	1	1	1/3
2	01	2	1/3
3	001	3	1/4
3	000	4	1/12

$L_{Huffman} = 2$比特

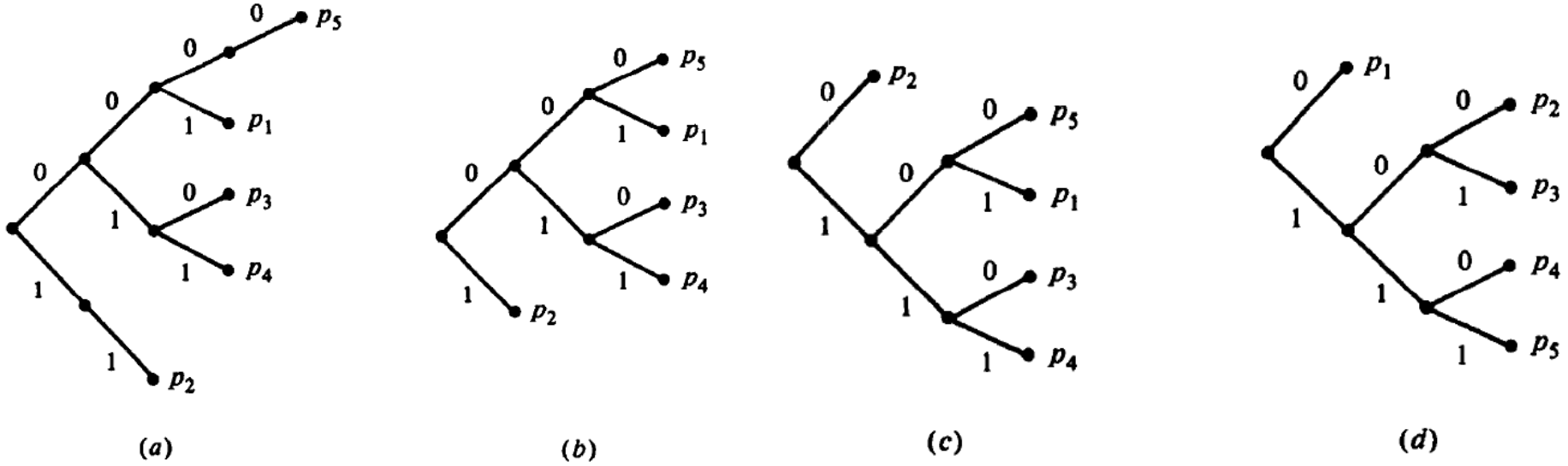
$L_{Shannon} = 2.17$比特

赫夫曼码的最优性

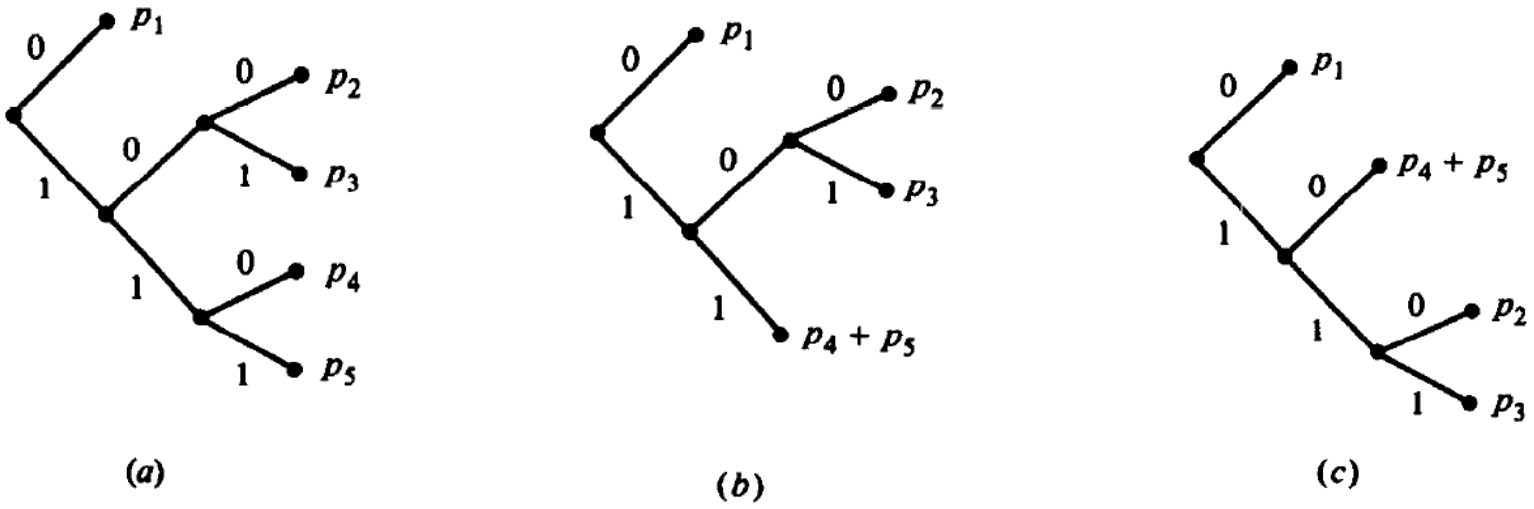
- **定理** 对任意一个分布，必然存在满足如下性质的一个最优即时码：
  1. 其长度序列与按概率分布排列的次序相反
  2. 最长的两个码字具有相同长度
  3. 最长的两个码字仅在最后一位上有所差别，且对应与两个最小可能发生的字符
- 满足以上定理得最优码称为典则码
- **定理** 赫夫曼码是最优的，它提供了最短的期望码长

$$L(C^*) \leq L(C')$$

赫夫曼码的最优性


0
0
0
0
1
p_5
1
p_1
0
1
p_3
1
p_4
1
1
p_2
(a)
0
0
0
1
p_5
1
p_1
0
1
p_3
1
p_4
1
p_2
(b)
0
p_2
1
0
0
1
p_5
1
p_1
0
1
p_3
1
p_4
(c)
0
p_1
1
0
0
1
p_2
1
p_3
0
1
p_4
1
p_5
(d)

赫夫曼码的最优性


p_1
0
p_2
0
p_3
1
0
1
p_4
0
p_5
1
(a)
p_1
0
p_2
0
p_3
1
0
1
$p_4 + p_5$
1
(b)
p_1
0
$p_4 + p_5$
0
p_2
1
0
1
p_3
1
(c)

Shannon-Fano-Elias编码

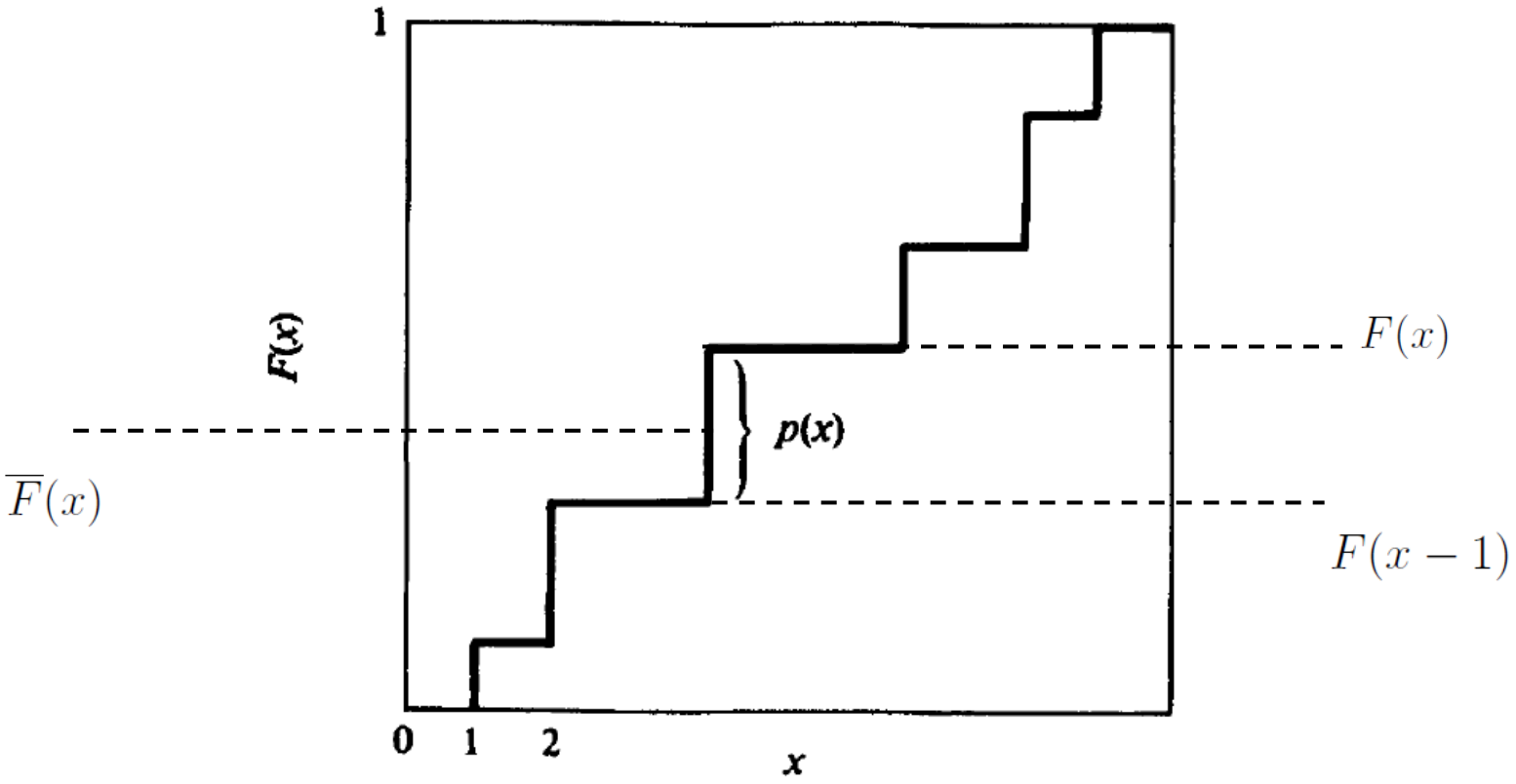
- 累计分布函数：假定取$\mathcal{X}=\{1,2,\cdots,m\}$，并对所有$x$，有$p(x)>0$。定义累计分布函数

$$F(x)=\sum_{a\le x}p(a)$$

- 修正的累计分布函数

$$\overline{F}(x)=\sum_{a<x}p(a)+\frac{1}{2}p(x)$$

Shannon-Fano-Elias编码



Shannon-Fano-Elias编码

- $\overline{F}(x)$ 唯一确定x，可作为x的编码
- 一般情况下，$\overline{F}(x)$ 需用无限多比特表示
- 取 $\overline{F}(x)$ 的前l(x)位作为x的编码：$\lfloor \overline{F}(x) \rfloor_{l(x)}$

$$l(x) = \left\lceil \log \frac{1}{p(x)} \right\rceil + 1$$

- 此编码是前缀码
- 编码的期望长度：

$$L < H(X) + 2$$