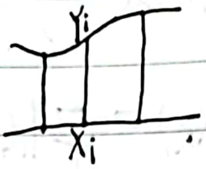
Lesson 2

插值 Interpolation　求积分 $\int_a^b f(x)dx$

(Methematica 推荐)



- 矩形积分 $I=h\sum_i y_i=\sum_i y_i(x_{i+1}-x_i)$　$(=\sum_i y_i w_i$，w_i 权重$)$ $\sum_i w_i=1$

  矩形~中 $w_i=(b-a)/N$　　$Ah^2=error$

  不同的形式有不同的ω_i，甚至有可能是随机数的形式.

$[f(x_{i+1})-f(x_i)]h/2$

$\sim f'(x_i)h^2/2\sim O(h^2)$

- 改进 两种矩形积分求平均　error$=O(h^3)$

  $f(x+z)=f(x)+f'(x)z+\frac{1}{2}f''(x)z^2+\cdots$

  矩形　三角形　高阶效应

  $O(h^2)$　$O(h^3)$　$O(h^4)$

  前提:知道导数(估计)

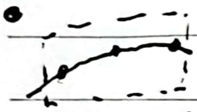
- Simpson 积分不需要知道导数，error$\sim h^3$，梯形积分

  $I=\sum_i \frac{h_i}{2}(f_i+f_{i+1})$　等间距　$I=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]+h\sum f_i\ (x_i\neq a,b)$

△ tips，　$I=0$ for $i=1$　　$I=I+h*f_i$

缺点，乘法费时间，改成n次加法，1次乘法。

从两点插值得来

- 

  $f(x)=\sum_i f_i l_i(x)$　　$\int_{x_1}^{x_1+2h}(y_1l_1+y_2l_2+y_3l_3)dx$

  $\sum_i y_i\int_{x_1}^{x_1+(N-1)h} l_i(x)dx=\sum_i y_i\int_{x_1}^{x_1+(N-1)h}\frac{\prod_{i\neq j}(x-x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)}dx$

扫描全能王 创建

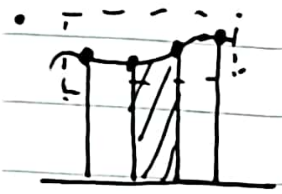
$x_i = h x_i'$ $\quad I = \int_0^{(N-1)h} h\sum_i y_i \frac{\prod x'-x_i'}{\prod x_j'-x_i'}\,dx$

$= h\sum y_i W_i$ $\quad W_i$ 可以查表

$l_i(x) = \frac{\prod_{i\neq j}(x-x_i)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}$ 是x的N-1次，$\quad l_i(x_j)=\delta_{ij}$

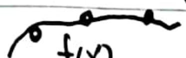
$l(x) = \sum_i l_i(x) - 1$，$\quad l(x_\alpha) = \sum_i l_i(x_\alpha) - 1 = \sum_i \delta_{i\alpha} - 1 = 0$

N-1次方程 N-1个解，恒为0，∴ $\sum_i l_i(x) \equiv 1$

• 

• Newton插值 $\quad y = y_1 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots$

以后新加一点对前面的零点无影响



$f(x)$

取 $x=x_1, x=x_2,$ $\begin{cases} y_2 = y_1 + a_1(x_2-x_1)\\ y_3 = y_1+a_1(x_3-x_1)+a_2(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\ \cdots\end{cases}$

······

Padé多项式插值 克服多项式高次项.

$\frac{P(x_i) \leftarrow k次}{Q(x_i)\leftarrow k'次} = y_i$

$k+k'=2$

缺点 在点的中间会有发散（分母存在零点）

• $\int_a^b f(x)dx \to \int_0^1 f[a+(b-a)t]\,dt\,(b-a) \,/\, \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\frac{b-a}{2}dt$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \to \int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{(1-t)^2}$ $\quad$ 可以变换成三角函数

$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_0^{\pi} f(\cos t)\sin t\,dt$

FFT

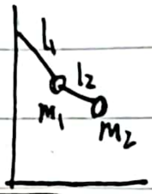
$f(\cos t) = \frac{1}{2M}c_0 + \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M} c_j\cos(jt) + \frac{1}{2M}c_M\cos(Mt)$ $\quad (t\to\cos t)$

助教：闵振宸 林孝水　　作业：半月1次

连续－离散　$f'(x_i) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}$　(向前向后)

$$f'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}$$

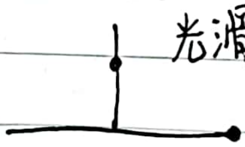
作业：经典力学　$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$，目的　(Dsolve, NDsolve)

① 

动力学

② Earth－Sun　~~$U = -\left(\frac{A}{r^a}\right)$~~ $U = -A/r^a$

动力学

③ 
光滑表面，多久倒下来
(初角速度给出)

• 差分　$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$　Runge-Kutta 算法 (RK23 三阶 $O(h^3)$, RK45 ~ O^5)

《Note on the Runge-Kutta Method》 W.E.M.xxx 1960 (RK45不一定最好)

图像　$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx$

$$= (x_{n+1}-x_n) f(x_n, y_n) \quad 矩形近似 \quad + O(h^2)$$

$$\underbrace{y_{n+1} \cong y_n + \frac{x_{n+1}-x_n}{2}\left[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]}_{自洽方程} + O(h^3)$$

取近似值　$y_{n+1} \cong y_n + \dfrac{x_{n+1}-x_n}{2}\left[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\right] + O(h^3)$

$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \dfrac{x_{n+1}-x_n}{2} f(x_n, y_n)$　预估值

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n) + f(x_n+h, y_n+\delta y_n)\right]$$

$$y_{n+1}=y_n+\int_0^h f(x_n+z,\ y(x_n+z))\,dz$$

$$=y_n+\int_0^h f(x_n+z,\ y_n+y_n'z)\,dz$$

$$=y_n+\int_0^h [f(x_n,y_n)+f_x z+f_y y_n' z]\,dz$$

$$=y_n+f(x_n,y_n)h+(f_x+f_y y_n')\frac{h^2}{2}+O(h^3)$$ 继续展开，到高阶)

龙格库塔好，但是不要迷信