Review

离散化　　h 步长，和精度有关

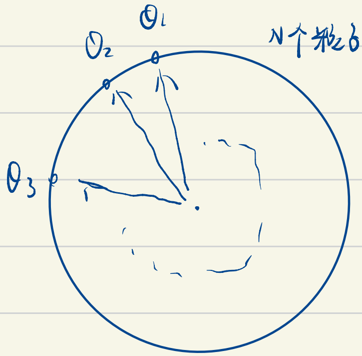
$\Downarrow$　　精度在长时间含时演化中十分重要。

得到的方程：　$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1)$　一个迭代方程.

优点：
- 内存小
- 效率高
- 编程简单.

今天目的：处理具体问题.

① Kuramoto Model（同步效应）Ref：Rev. Mod. Phys. 77. 137 (2005)



N个振子生活在同一个圆盘上.

运动方程.

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \frac{K}{N}\sum_j \sin(\theta_i - \theta_j)$$

---

② 扩散方程. $\frac{\partial}{\partial t}P = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P + u(x)P(x,t)$

离散化　$P(x,t) \to P_i^n$　(n ← 空间维度，i ← 时间)

$$\frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{\Delta t} = D\cdot\frac{P_i^{n+1} + P_i^{n-1} - 2P_n^i}{(\Delta x)^2} + u_n P_n^i$$

$$\Rightarrow \quad P_{i+1}^{n} = P_i^n + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(P_i^{n+1} + P_i^{n-1} - 2P_i^n\right) + \Delta t\, u_n P_n^{i}$$

$\Uparrow$

迭代方程

给定初始时刻的初值

$$\vec{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0^1 \\ P_0^2 \\ \vdots \\ P_0^N \end{pmatrix}$$

则 $\vec{P}_0 \to \vec{P}_1 \to \vec{P}_2 \to \cdots \to \vec{P}_N$，求解出t时刻的 $\vec{P}$

$$\boxed{\text{边界条件}\begin{cases}\text{平边界条件} & P_0 = P_{N+1} = 0 \\ \text{周期边界条件} & P_{N+1} = P_1\end{cases}}$$

时间步长和空间步长对计算精度的影响，一般对应于 $\underline{\Delta t \sim \Delta x^2}$

Kuramoto Model.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{N}\sum_j \sin(\theta_i - \theta_j)$$

$$\Rightarrow \text{离散化} \quad \frac{\theta_i(t+dt) - \theta_i(t)}{dt} = \omega_i - \frac{K}{N}\sum_j \sin(\theta_i - \theta_j)$$

$$\Rightarrow \quad \theta_i(t+dt) - \theta_i(t) = dt\left[\omega_i - \frac{K}{N}\sum_j \sin(\theta_i - \theta_j)\right]$$

$\Downarrow$ 迭代方程

$\uparrow$ 足够小

实验：多个摆的同步，

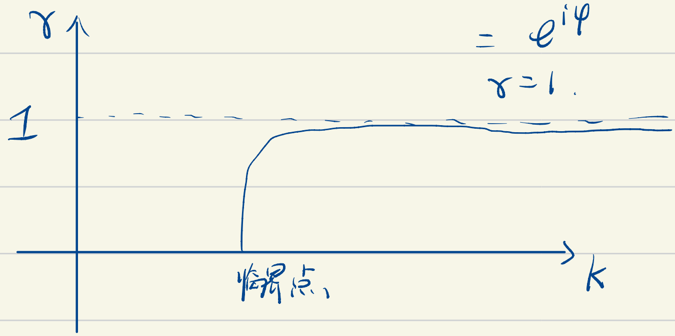
同步的物理图像：

序参量 $re^{i\varphi} = \frac{1}{N}\sum_i e^{i\theta_i}$， 若不同步，则 $\sum_i e^{i\theta_i} = 0$，即 $r=0$

若有同步，则 $r \neq 0$，e.g. $\frac{1}{N}\sum e^{i\varphi}$

$= e^{i\varphi}$

$r=1$.



一个平均场的处理。

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{2iN}\sum_j \left(e^{i(\theta_i-\theta_j)} - e^{-i(\theta_i-\theta_j)}\right)$$

$$= \omega_i - \frac{K}{2i}\left(e^{i\theta_i} r e^{i\varphi} - e^{-i\theta_i} r e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \omega_i - Kr\sin(\theta_i - \varphi)$$

如果系统可以同步 $\theta_i - \varphi = \text{const} = \theta_i(0) - \varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega t \\ \theta_i = \theta_i(0) + \omega t \end{cases}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_i = \omega_i - Kr\sin(\theta_i(0) - \varphi)$$

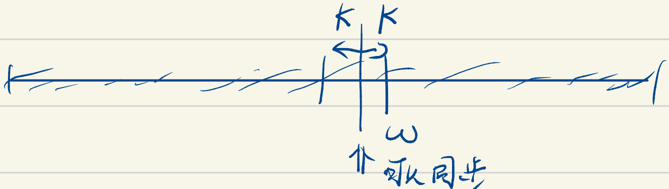
$$= \omega$$

or $\omega = \omega_i - Kr\sin(\theta_i(0) - \varphi)$, $\dot{\theta}_i = \omega$

若有解，则可以同步。

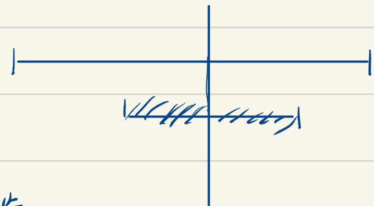
同步的条件.

$$|\omega-\omega_i| = |-K\gamma\sin(\theta_i(0)-\psi_0)| \le K\gamma \le K.$$

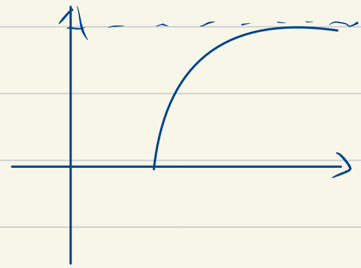


K小时. γ小，只有部分同步，会进一步减小γ的数值，最终 $\gamma\to 0$.

K大时. ω分布小



可以完全同步



牛顿力学问题 $\ddot{x}=f(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P=\frac{P_{n+1}+P_n-2P_n}{(\Delta x)^2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}+x_{n-1}-2x_n}{(\Delta t)^2}=f(x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}+f(x_n)(\Delta t)^2$$

初始条件 $\begin{cases} x_0 = ? & \text{初始位置} \\ x_1 = x_0+\dot{x}\Delta t = ? & \text{初始速度} \end{cases}$

作业：求解 Kuramoto 模型，并讨论其中的同步效应。