

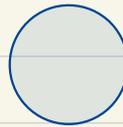
今天 { ① Mathematica 介绍.

② 插值, 拟合, Runge-Kutta 应用.

学会处理经典力学的问题: 处理无法解析求解的方程.

一个经典力学中的例子:

$$U(r) = -\frac{A}{r^d}$$



圆周?

No.

粒子的运动轨迹?

← MMA 的例子.

① 定义坐标.

② 定义拉格朗日量.

③ 求解运动方程.

微分

mma 中数值求解方程的命令 `NSolve`

$\left. \begin{array}{l} \text{DSolve} \\ \text{Solve} \\ \text{NSolve} \end{array} \right\}$ 解析求解微分方程.
 $\left. \begin{array}{l} \text{Solve} \\ \text{NSolve} \end{array} \right\}$ 解方程.

Parametric plot 参数画图.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

1) 微分方程. Runge-Kutta 应用

2) 特殊用途: 求面积

差分方法. $\frac{dy}{dx} = [y(t_{n+1}) - y(t_n)] / \Delta x = (y_{n+1} - y_n) / \Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow y_{n+1} - y_n = f(x_n, y_n) \Delta x$$

↓

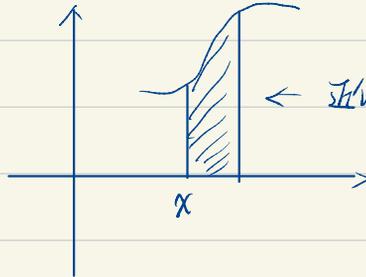
$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n) \text{ 矩形近似}$$

↓

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

梯形近似

另一种写法. $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$



← 近似表示此处面积

$$\begin{aligned}
 &= y_n + f(x_n, y_n)h + f_x \frac{h^2}{2} + O(h^3) \\
 &= y_n + f h + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y y'_n) + O(h^3) \quad y' = f \\
 &= y_n + f h + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

$$f_x = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\
 &= y_n + \int_0^h f(x_n + s, y(x_n + s)) ds \\
 &= y_n + \int_0^h (f + f_x s + \frac{f_{xx}}{2} s^2 + f_y y + \frac{f_{yy}}{2} s^2) ds \\
 &= y_n + f h + \frac{f_x h^2}{2} + f_y y_n h + O(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] + \dots \\
 &= y_n + \frac{h}{2} [f + f + f_x h + f_y y_n h + O(h^2)] \\
 &= y_n + f h + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

← 不求导数

= 所 Runge-Kutta 算法. h = \Delta x

四阶 Runge-Kutta 算法.

$$\begin{cases}
 k_1 = f(x_n, y_n) \\
 k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \\
 k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \\
 k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)
 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

e.g.

如何处理 = 所 偏微分方程?

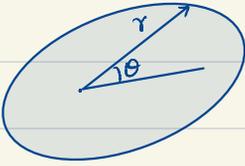


$$m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

↓ 变为 所 方程组

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin \theta \end{cases}$$

另一个例子.



$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

建议

ode45
Runge-Kutta 45.

程序

{ Matlab.
Mina.
Python