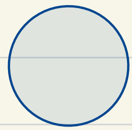
今天. ① Mathematica 介绍.
② 插值，拟合，Runge-kutta 应用.
学会处理经典力学的问题：处理无法解析求解的方程.

一个经典力学中的例子.

$$U(r) = -\frac{A}{r^{\alpha}}$$

粒子的运动轨迹？



圆周？
NO.

← MMA 的例子.

① 定义坐标.

② 定义拉格朗日量.

③ 求解运动方程.

微分.

mma 中数值求解方程的命令 NDSolve

DSolve 解析求解微分方程.
Slove
NSolve
解方程.

ParametricPlot 参数画图.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

1) 微分方程. Runge-Kutta 应用

2) 特殊用途：求面积

差分方法. $\frac{dy}{dx} = [y(t_{n+1}) - y(t_n)]/\Delta x = (y_{n+1} - y_n)/\Delta x$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Longrightarrow y_{n+1} - y_n = f(x_n, y_n)\Delta x$$

$$\Downarrow$$

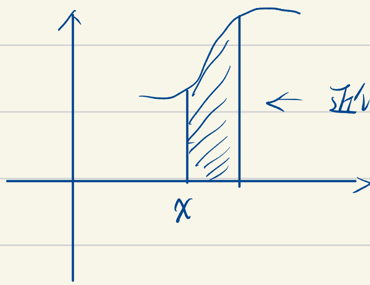
$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n)$$ 矩形近似

$$\Downarrow$$

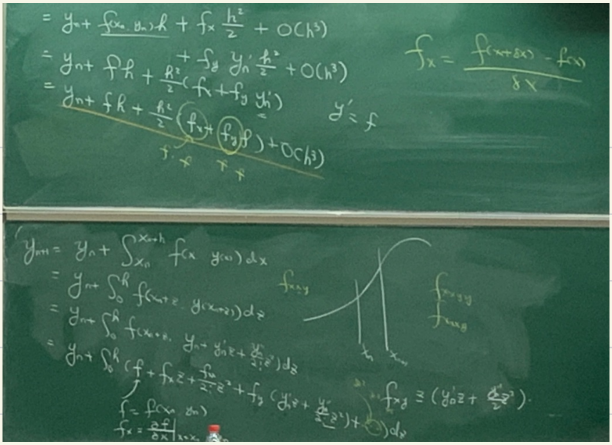
$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

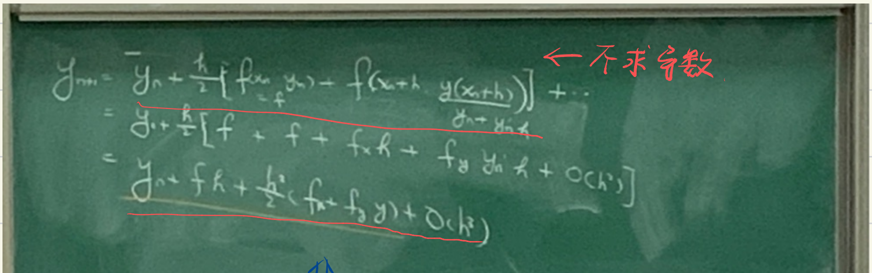
梯形近似

另一种写法. $y_{n+1} = y_n + \int^{x_n+\Delta x} f(x, y_n)\, dx$



← 近似表示此处面积





$\Uparrow$

二阶 Runge-Kutta 算法. $\qquad h = \Delta x$

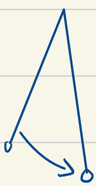
四阶 Runge-Kutta 算法.

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

如何处理二阶偏微分方程？

e.g.

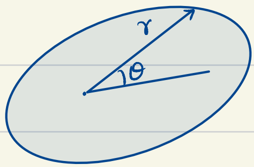


$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$\Downarrow$ 变为一阶方程组.

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

第一个任务.



$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$$

建议 ode45
Runge-Kutta 45.

程序. Matlab.
Mma
python