Anderson Localization

Bloch定理. ⇒ 理想晶体中的量子态是Bloch-wave.

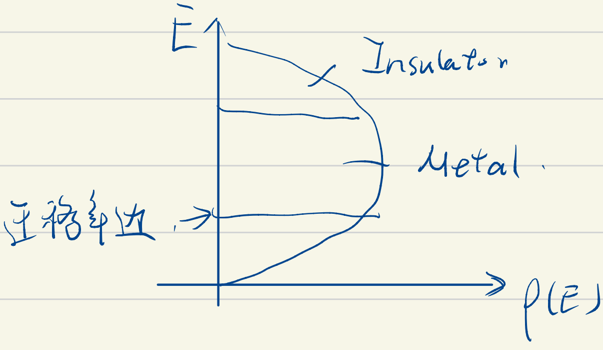
实际的晶体中，系统中存在一些deft，会破坏系统的周期性，而这种非周期性非常强时，系统会变成完全的局域态。

Anderson's Model $\qquad W_i \in U(-W/2, W/2)$

$$H=\sum_{\langle ij\rangle} t c_i^\dagger c_j + \sum_i W_i c_i^\dagger c_i$$

在3D下有一个有限的 V_c,

李正中《固体理论》
无序体系



转移矩阵方法.

我们关注的模型。

$$H=\sum_i t_i c_i^\dagger c_{i+1} + h.c + V_i c_i^\dagger c_i$$

① $t_i = \bar{t} + \varepsilon_i$ 　　一维的紧束缚模型.

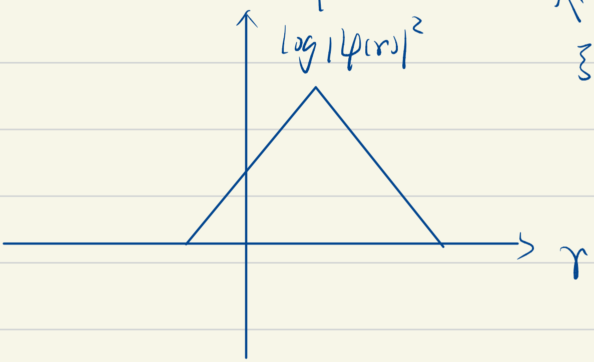
② $\begin{cases} V_i = \text{Random} \\ V_i = V\cos(Qi) \end{cases}$

$\boxed{\text{作业：对角化上述模型，并画出其波函数. 势能形式自选}}$

对于局域的波函数，有

$$|\Psi| \propto e^{-|r-r_0|/\xi}$$

ξ 就定义为局域长度。

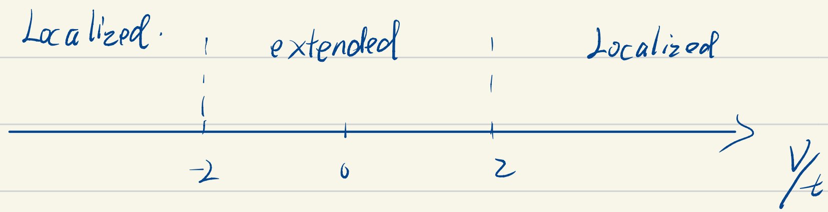


$\begin{cases} \xi \to \infty, \text{扩展态} \\ \xi \text{ 有限，局域态.} \end{cases}$

① Aubry-André Model (AA Model)

$$H = t\sum_i \left(c_i^\dagger c_{i+1} + h.c.\right) + V\cos(2\pi\alpha i)\, c_i^\dagger c_i$$

α是无理数



Fourier 变换.

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{ik2\pi\alpha m}\, c_k$$

$$\Rightarrow \quad H' = \sum_k 2t\cos(2\pi\alpha k)\, c_k^\dagger c_k + \frac{V}{2}\sum_k \left(c_k^\dagger c_{k+1} + c_{k+1}^\dagger c_k\right)$$

H、H' 是参数互换.

$$\begin{cases} V \to 2t \\ t \to V/2 \end{cases}$$

在 $V=2t$ 是 H、H' 是一样的

self-dual Relation.

Fourier 变换前后.

$$\begin{cases} \text{extended} \to \text{Localized} \\ \text{Localized} \to \text{extended} \end{cases}$$

相变发生在 $V=2t$ 的这一点上。

各个模型的运动方程。

$$E\psi_n = t(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}) + V\cos(2\pi\alpha n)\psi_n$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{n+1} = \frac{1}{t}\left(E - V\cos(2\pi\alpha n)\right)\psi_n - \psi_{n-1}$$

$$\psi_n = \psi_n$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\psi_{n+1}\\ \psi_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{t}(E-V_n) & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{转移矩阵 } T_n}\begin{pmatrix}\psi_n\\ \psi_{n-1}\end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix}\psi_{N+1}\\ \psi_N\end{pmatrix} = T_N T_{N-1}\cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix}$$

利用连乘，可以求出 ψ_{N+1}，ψ_N 的值。

在 N 非常大时，数值上容易发散。如何处理？

$\boxed{\text{QR分解}}$

$A = QR$，Q是幺正矩阵. R是上三角矩阵.

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = T_n T_{n-1} \cdots T_2 T_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_n T_{n-1} \cdots \underbrace{T_2 Q_1}_{\tilde{T}_2} R_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_n T_{n-1} \cdots \tilde{T}_2 R_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & * \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= T_n T_{n-1} \cdots Q_2 R_2 R_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= Q_n R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$= Q_n \left(\begin{array}{c|c} \lambda_n^1 \lambda_{n-1}^1 \cdots \lambda_1^1 & * \\ \hline 0 & \lambda_n^2 \lambda_{n-1}^2 \cdots \lambda_1^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

记为

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = Q_n \begin{pmatrix} \Lambda_1 & * \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_{n+1}\rangle = Q_n \tilde{R}_n |\Psi_1\rangle$$

则 $$\langle \Xi_{n+1} | \Xi_{n+1} \rangle = \langle \Xi_1 | \check{R}_n^{\dagger} a_n^{\dagger} a_n \check{R}_n | \Xi_1 \rangle$$

$$= \langle \Xi_1 | \check{R}_n^{\dagger} \check{R}_n | \Xi_1 \rangle$$

$$\sim e^{2n/\xi}$$

$$\log e^{2n/\xi} = \log\left(\langle \Xi_1 | \check{R}_n^{\dagger} \check{R}_n | \Xi_1 \rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\xi} = \frac{1}{n} \log\left(\langle \Xi_1 | \check{R}_n^{\dagger} \check{R}_n | \Xi_1 \rangle\right)$$

$$\boxed{\text{定义} \quad \frac{1}{\xi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\langle \Xi_1 | \check{R}_n^{\dagger} \check{R}_n | \Xi_1 \rangle\right)}$$

$\check{R}_n^{\dagger}\check{R}_n$ 是 $2n$ 个矩阵相乘后的结果，

但 $\check{R}_n$ 仍是上三角矩阵，且

$$(\check{R}_n)_{ii} = (R_n)_{ii} (R_{n-1})_{ii} \cdots (R_1)_{ii}$$

取 $|\Xi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，一个物理的初态，则

$$\frac{1}{\xi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(\lambda_i^2)$$ ，显著地降低了数的发散.

对于高维的转移矩阵，可以得到一系列的 $\{\xi_i\}$.

对最大的 ξ，做为系统的局域长度.