Review

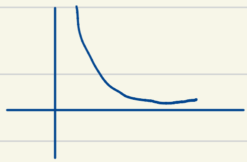
上一节课：Quantum Langevin 方程

$$m\ddot{x} + \int_{-\infty}^{t} \mu(t-t')\dot{x}(t')dt' + \frac{\partial V}{\partial x} = f(t)$$

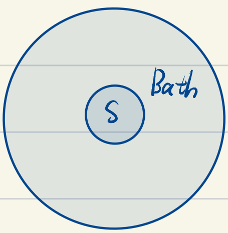
① 可编程
② 3种经典 → 准/量子.
③ 阻尼.
④ $f(t)$
$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$

★ limit

$\mu(t-t')$



今天讲 Lindblad 主方程的求解.



$$H = H_S + H_B + H_{int}$$

我们关注系统(system)的演化

对于一个量子系统，如果知道它的密度矩阵的演化

$\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$

任意的力学量都可以写为

$$\bar{A} = tr(\hat{\rho}_S \hat{A})$$

密度矩阵满足 $\begin{cases} tr(\rho_S) = 1 \\ \rho_S^\dagger = \rho_S \end{cases}$

对于一个 Markov 的热库，此时系统的演化应该满足什么方程呢？

如果系统和环境之间不存在相互作用，则

$$i\dot{\rho} = [H, \rho] \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

如果之间存在微弱的相互作用，猜测运动方程满足

$$\underline{i\dot{\rho} = [H, \rho] + \text{修正}}$$

$$= [H, \rho] + \mathcal{L}(\rho)$$

Lindblad 项

其满足 $\mathrm{Tr}[\mathcal{L}(\rho)] = 0$

实际上 $\mathcal{L}(\rho) \propto \sum_m \gamma_m (2L_m\rho L_m^+ - L_m^+L_m\rho - \rho L_m^+L_m)$

其中 L_m 是定义在 system 上的算子。

$$\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$$

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{L}(\rho)]$$

$$= \mathrm{Tr}[2L_m\rho L_m^+ - L_m^+L_m\rho - \rho L_m^+L_m]$$

$$= 0$$ 求迹的轮换对称性

一个例子 $H_s = \omega\sigma_z$

$$\begin{cases} i\dot{\rho} = [H_s, \rho] + \gamma_z\mathcal{L}_{\sigma_z}(\rho) + \gamma_x\mathcal{L}_{\sigma_x}(\rho) + \gamma_y\mathcal{L}_{\sigma_y}(\rho) \\ L_m = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \end{cases}$$

如何求解？

$i\dot{\rho} = [H, \rho]$ $\Leftrightarrow$ 选择 basis

① $i\langle\alpha|\dot{\rho}|\beta\rangle = i\dot{\rho}_{\alpha\beta}$ ② $\langle\alpha|[H,\rho]|\beta\rangle$

$$= H_{\alpha\nu}\rho_{\nu\beta} - \rho_{\alpha\nu}H_{\nu\beta}$$

③ $L_{\sigma_x}(\rho) = (2\sigma_x\rho\sigma_x - \rho\sigma_x\sigma_x - \sigma_x\sigma_x\rho)$ 同理 $L_{\sigma_y}(\rho)$, $L_{\sigma_z}(\rho)$ 都可以写出来.

$$= 2(\sigma_x\rho\sigma_x - \rho)$$

$$\langle\alpha|L_{\sigma_x}(\rho)|\beta\rangle = 2(\sigma_x)_{\alpha\mu}\rho_{\mu\nu}(\sigma_x)_{\nu\beta} - 2\rho_{\alpha\beta}$$

另我们只考虑 σ_z 耗散 则

这里的 γ 是一个耗散数.

$$\begin{cases} i\dot{\rho}_{\uparrow\uparrow} = 0 \\ i\dot{\rho}_{\downarrow\downarrow} = 0 \\ i\dot{\rho}_{\uparrow\downarrow} = 2\omega\rho_{\uparrow\downarrow} - 4\gamma\rho_{\uparrow\downarrow} \end{cases} \Rightarrow \boxed{i\dot{\rho}_i = H_{ij}\rho_j}$$

一阶含时运动方程.

$i[\dot{\rho}] = H[\rho]$

作业 ① 对于 spin model.

$H_s = \omega\sigma_z$, $L_m = \sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$. 分别讨论

其动力学, γ 自取

② 对于 Boson model

$H_s = \omega a^\dagger a$, $L_m = a, a^\dagger, a^2, (a^\dagger)^2$, 分别讨论其动力学, γ 自取

Scully, Zubairy, Quantum Optics, chap. 8-9.

Ref: Gisin Percival, J. phys. A. Math. Gen. 1992.
Gisin PRL 52, 1657 (1984)

$$|\psi\rangle \xrightarrow{dt} |\psi\rangle + |d\psi\rangle$$

$$e^{-iH\delta t}|\psi\rangle \to$$

$$|d\psi\rangle = |v\rangle dt + \sum_j \gamma_j |u_j\rangle d\xi_j$$

$$= -iH_s|\psi\rangle dt + \sum_j \gamma_j |u_j\rangle d\xi_j$$

其中 $|v\rangle = -iH_s|\psi\rangle$ 是系统自身演化的部分

$|u_j\rangle d\xi_j$，随机改变

$\boxed{|u_j\rangle = \langle j|\psi\rangle}$

$\langle d\xi_j\rangle = 0$, $\langle d\xi_i^* d\xi_j\rangle = 2dt \cdot \delta_{ij}$

$\langle d\xi_i d\xi_j\rangle = 0$

则 $\rho(t+dt) = (|\psi\rangle + |d\psi\rangle)(\langle\psi| + \langle d\psi|)$

$$= |\psi\rangle\langle\psi| + |d\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle d\psi| + |d\psi\rangle\langle d\psi|$$

$$= \rho(t) + (|v\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle v|)dt + \sum_{ij} d\xi_i d\xi_j^* |u_i\rangle\langle u_j| \gamma_i\gamma_j^*$$

$$= \rho(t) + -i[H,\rho]dt + 2\sum_i |\gamma_i| |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$= \rho(t) + (-i)[H,\rho]dt + 2\sum_i |\gamma_i| \underline{L_i \rho L_i^\dagger}\, dt$$

和前面的主方程比，仍少了两项？

由于 $|\psi\rangle + |d\psi\rangle$ 少了归一化的系数，加上后：

$$\begin{cases} |d\psi\rangle = |v\rangle dt + |u_j\rangle d\xi_j \\ |v\rangle = -iH|\psi\rangle + |w\rangle. \end{cases}$$

$$\underline{|w\rangle = \sum_j L_j^\dagger L_j |\psi\rangle}$$