Review

随机数
- SDE $dx = \mu dt + \sigma dW$
- Integratation/高维 蒙特卡洛

随机数
- ① 均匀伪随机数
- ② B-M方法产生高斯分布

---

① $\int f(x,y)\,dx\,dy$

② Ising 模型

P.S. 如何产生一个 特定分布的随机数?

求积分

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{N}\sum_i f(x_i) \qquad \boxed{x_i = \frac{\pi}{N}\cdot i}$$

取 y_i 是一个随机均匀分布

则 $$\sum_i \frac{f(y_i)}{N} = \int dy\, \rho(y) f(y)$$

$$= \int_0^{\pi} dy\, f(y)\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$\boxed{\rho(y) = \frac{1}{\pi}\Theta(y)\,\Theta(\pi - y)}$$ ← y_i 的分布函数

令 $$\int_0^{\pi} dy\, f(y) = \int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

则原有的积分 y_i 是一个 $[0,\pi)$ 的均匀随机数

$$\int_0^{\pi} dx\, f(x) = \frac{\pi}{N}\sum_i f(y_i)$$

此结果可以推广到高维的积分，即

$$\boxed{I = \int_\Omega f(\vec{x})\, d\vec{x} = S\left[\frac{1}{N}\sum_i f(\vec{x}_i)\right] = S\bar{f}}$$

其中 $\vec{x}_i$ 是积分区域 Ω 中的均匀分布随机数。

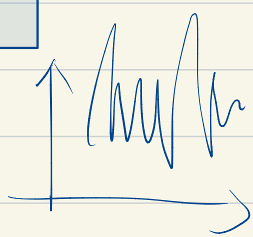
$\bar{f}$ 每次的实现都有不同，其分布满足 $\underline{\bar{f} \in N(\mu, \frac{\sigma^2}{N})}$ 高斯分布.

$\Uparrow$ 与积分的维度无关，在高维的时候具有很好的应用.

作业 $d=10$ 维．$\{$ 找3、4个例子．利用蒙特卡洛求解

$f(x) = \exp(-a\vec{x}^2 - b\vec{x}^4 - A\sin(\vec{c}\vec{x}))$

$f(x)$



具有很多震荡的函数.
均匀抽样可能导致.

我们可能需要一些<u>重要抽样</u>，利用非均匀分布的随机数.

$$I = \int f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int \left(\frac{f(\vec{x})}{p(\vec{x})}\right) p(\vec{x})\, d\vec{x} = \int g(\vec{x})\, \underline{p(\vec{x})\, d\vec{x}}$$

$\Downarrow$

让这个函数比较平滑 $\quad = \sum_i g(\vec{x}_i) \frac{1}{N}$.

而 x_i 是一个分布函数为 $\rho(x)$ 的随机数；这种方法可以显著的提升精度，

问：如何产生给定的分布？

<u>Metropolis 方法</u>

$$\frac{W_{i\to j}}{W_{j\to i}} = \frac{P_j}{P_i}$$ ，细致平衡条件。，代码附在网页上。

ε_1 $\quad e^{-\beta\varepsilon_1}/Z$

ε_0 $\quad \dfrac{e^{-\beta\varepsilon_0}}{Z}$

下一步

初始所在的点 0 → 0

$\int_0^1 \eta < e^{-\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}$ 就它。

重复多次后，有 $\dfrac{P_0}{P_1} = e^{-\beta(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}$

也可以推广到产生满足特定分布的构型，$P(\vec{x}) = e^{-\beta V(\vec{x})}$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$$