Review

4次Nobel奖，与随机数相关

Ito lemma.

---

① Ito lemma.

② 求积分 $\int f(x)dx$ ，蒙特卡罗模拟.

Ito lemma.

$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{\partial}{\partial x}V + \xi$ ， stochastic differential equation 的求解.

$\dot{x}$ 导数在随机微分方程中是不良好定义的

dx 增量可以较好定义.

一个数学书上的写法

$dx(t) = \mu dt + \sigma dW$

μ: drift velocity

σ: 扩散系

dW: wiener process

$W = \int_0^t \xi(t)dt = 0$. $\overline{W} = 0$

$\langle W(t) W(t') \rangle = \min(t, t')$

$dW = \xi dt$

一个例子. Black-Scholes 方程.

$$dS = rS\,dt + \sigma S\,dW$$

使用 $\frac{dS}{S} = (rS + \sigma S)\,dt$ 求解是不对的.

正确的求解应该是利用 Ito 引理

$\boxed{\text{链式法则不再成立.} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2}}$

我们先讨论 $dx = \mu dt + \sigma dW$ 的求解.

考虑函数 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu dt + \sigma dW)^2$$

(忽略 dt^2, $dt\,dW$ 项, 保留 dW^2 项)

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 (dW)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\,dW$$

而 $(dW)^2 \sim dt$

类比于 $\underline{\langle W^2 \rangle = 2Dt}$

令 $f = \ln S$. 而 $dS = rS\,dt + \sigma S\,dW$

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2$$

$$= \frac{1}{S}dS - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}(dS)^2$$

$$= \frac{1}{S}(rS\,dt + \sigma S\,dW) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}(rS\,dt + \sigma S\,dW)^2$$

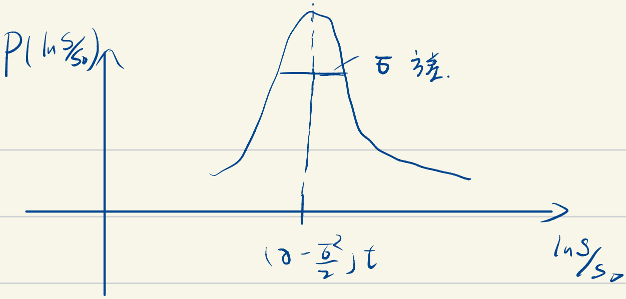
$$= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\,dW$$

$$\Rightarrow \underline{\ln S - \ln S_0 = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma W(t)}$$

一个正确的解.

$\underline{\underline{r = \frac{\sigma^2}{2} \text{ 时有一个转变点.}}}$

$$S = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}$$



数值求解.

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

μ, σ const.　　　　　$\xi_n \sim N(0, dt)$

离散后有　$X_{n+1} - X_n = \mu dt + \sigma \xi_n$

反复迭代后

$$\Rightarrow X_n = X_0 + \mu \cdot n \cdot dt + \underbrace{\sigma \sum_{m=0}^{n-1} \xi_m}_{\text{Wiener 过程}}$$

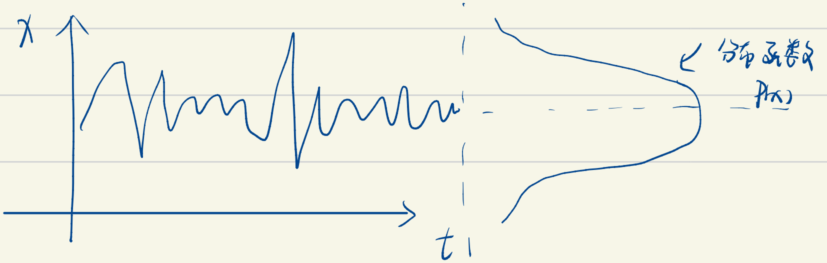
$$\Rightarrow X_n = X_0 + \mu t + \sigma W_n \qquad W_n \sim N(0, t)$$

$$\langle W_n W_m \rangle = t$$

上述结果可以推广到 μ 不是常数，σ 不是常数的情况，则

$$\underline{X_n = X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \mu_m dt + \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_m \xi_m}$$

$$\boxed{\text{每一个实现都是随机的，我们往往关注的是多次实现后的系综平均值}}$$



作业. $dx = \mu dt + \sigma dw$

计算x分布. 测试的时间

随机数的生成

rand(), [0, 1) 的均匀分布.

seed(). 随机数生成的种子.

$r_{i+1} = f(r_i)$, 随机数生成的机制

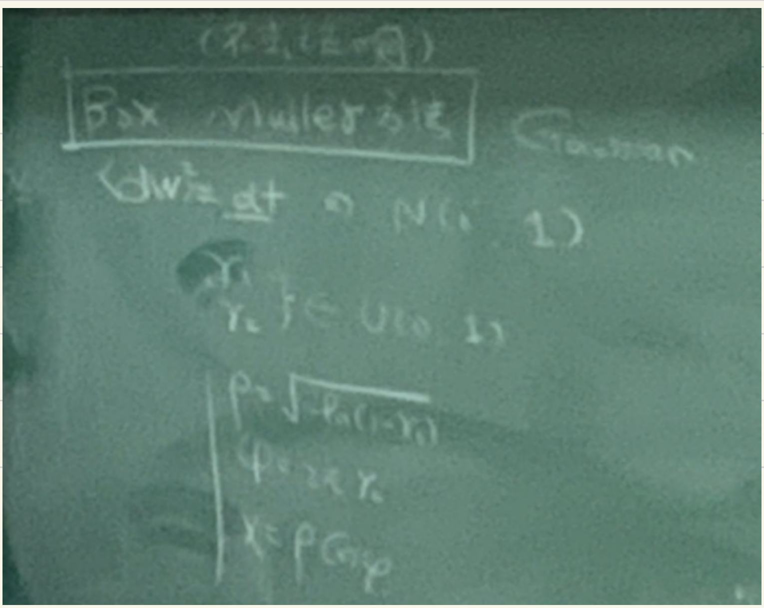
① $r_{i+1} = (a r_i + c) \bmod (m)$

② $r_{i+1} = (r_{i-2} - r_{i-3} - c) \bmod (2^{32} - 18)$

③ $r_{i+1} = (69069 r_i + 1013904243) \bmod (2^{32})$

伪随机数.

Box-Muller 方法 Gaussian 随机数的生成



高维的积分的求解.

利用梯形或者更高阶的积分方法, 收敛速度非常慢.

$$\text{error} \sim \frac{1}{N^{4/d}}$$, d 维度.

利用 Monte Carlo, 误差 $\sim \frac{1}{N^{1/2}}$, 在求解高维积分上有优势.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_i \frac{1}{n} f(x_i) \quad \leftarrow \text{均匀分布.}$$

$$= (b-a)\sum_i w_i f(x_i)$$, W_i 是一个权重函数.

$\int f(x)dx \sim \sum_i f(x_i)$, x_i 满足一个需要在域内均匀分布.