第二章　一般形式二次型的对角化

§1　玻色算符二次型的对角化

下边我们研究玻色厄米二次型，其一般形式为

$$H=\sum_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}b_\alpha^+b_\beta+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}b_\alpha^+b_\beta^++\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}^*b_\alpha b_\beta,$$

$$\alpha、\beta=1,\cdots,n. \tag{2.1}$$

这里 b_α^+、b_α 为玻色算符，它们满足对易关系 (1.26)，$A_{\alpha\beta}$、$B_{\alpha\beta}$ 为数参数. 假设参数矩阵 $A=\|A_{\alpha\beta}\|$ 是厄米矩阵：

$$A=A^+ \text{ 或 } A^*=A^T,\quad A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}^*, \tag{2.2a}$$

而参数矩阵 $B=\|B_{\alpha\beta}\|$ 是对称矩阵：

$$B=B^T \text{ 或 } B^*=B^+, B_{\alpha\beta}=B_{\beta\alpha}. \tag{2.2b}$$

这里＋、* 和 T 分别标记厄米共轭运算、复共轭运算和转置运算. 这里还要给矩阵 A 和 B 加上物理要求，以保证(2.1)式的严格正定性.

a．正则变换　为了将(2.1)式对角化，我们将推广第一章最后几节所讲的特殊形式二次型的对角化方法.

引入新的算符

$$\xi_\mu=\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(b_\alpha u_{\alpha\mu}^*-b_\alpha^+v_{\alpha\mu}^*), \tag{2.3a}$$

$$\xi_\mu^+=\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(b_\alpha^+u_{\alpha\mu}-b_\alpha v_{\alpha\mu}), \tag{2.3b}$$

这里给参数 $u_{\alpha\mu}$、$v_{\alpha\mu}$ 加上如下的正交归一化条件①：

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(u_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}^*-v_{\alpha\mu}v_{\alpha\nu}^*)=\Delta_{\mu\nu}, \tag{2.4a}$$

---

① 如下面的证明，条件(2.5)是条件(2.4)的推论.

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(u_{\alpha\mu}v_{\alpha\nu}-u_{\alpha\nu}v_{\alpha\mu})=0, \tag{2.4b}$$

和

$$\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u_{\alpha\mu}u^*_{\beta\mu}-v_{\beta\mu}v^*_{\alpha\mu})=\Delta_{\alpha\beta}, \tag{2.5a}$$

$$\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u_{\alpha\mu}v^*_{\beta\mu}-u_{\beta\mu}v^*_{\alpha\mu})=0. \tag{2.5b}$$

不难验证，条件(2.4)、(2.5)保证了变换式(2.3)具有正则性. 例如，算出对易式:

$$\begin{aligned}
[\xi_\mu,\xi^+_\nu]_-&=\xi_\mu\xi^+_\nu-\xi^+_\nu\xi_\mu\\
&=\sum_{\alpha\beta}[b_\alpha u^*_{\alpha\mu}-b^+_\alpha v^*_{\alpha\mu}, b^+_\beta u_{\beta\nu}-b_\beta v_{\beta\nu}]_-\\
&=\sum_{\alpha\beta}(u^*_{\alpha\mu}u_{\beta\nu}[b_\alpha,b^+_\beta]_-+v^*_{\alpha\mu}v_{\beta\nu}[b^+_\alpha,b_\beta]_-\\
&=\sum_{\alpha}(u^*_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}-v^*_{\alpha\mu}v_{\alpha\nu})=\Delta_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.6a}$$

用类似的方法得到

$$\xi_\mu\xi_\nu-\xi_\nu\xi_\mu=0, \qquad \xi_\mu\xi^+_\nu-\xi^+_\nu\xi_\mu=0. \tag{2.6b}$$

因此，ξ^+_μ、ξ_μ 是玻色算符.

利用条件(2.4)、(2.5)，容易得出(2.3)式的逆变换:

$$b_\alpha=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u_{\alpha\mu}\xi_\mu+v^*_{\alpha\mu}\xi^+_\mu), \tag{2.7a}$$

$$b^+_\alpha=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u^*_{\alpha\mu}\xi^+_\mu+v_{\alpha\mu}\xi_\mu). \tag{2.7b}$$

b. 正则变换参数的方程组 现在我们证明，可以设法选择满足附加条件(2.4)、(2.5)的参数 $u_{\alpha\mu}$、$v_{\alpha\mu}$，以使准粒子表象(2.3)中的哈密顿量(2.1)具有对角形式

$$H=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}\Lambda_\mu\xi^+_\mu\xi_\mu+\hat{1}\cdot\mathscr{K},\quad \Lambda_\mu=\Lambda^*_\mu,\quad \mathscr{K}=\mathscr{K}^*. \tag{2.8}$$

现在阐明 $u_{\alpha\mu}$、$v_{\alpha\mu}$ 和 Λ_μ 的值应分别满足的必要条件. 假设哈密顿量(2.1)变为(2.8)的形式, 于是算符 ξ_μ^+ 和 ξ_μ 的运动方程为

$$i\frac{d\xi_\mu^+}{dt}=[\xi_\mu^+,H]=-\Lambda_\mu\xi_\mu^+, \tag{2.9a}$$

$$i\frac{d\xi_\mu}{dt}=[\xi_\mu,H]=\Lambda_\mu\xi_\mu. \tag{2.9b}$$

另一方面, 算符 b_α(决定于 H 形式(2.1))的运动方程具如下形式:

$$i\frac{db_\alpha}{dt}=[b_\alpha,H]=\sum_\beta(A_{\alpha\beta}b_\beta+B_{\alpha\beta}b_\beta^+), \tag{2.10}$$

其中 b_α 是用 ξ_μ^+ 和 ξ 作线性表示的. 将(2.7)式代入(2.10)式, 并考虑(2.9)式, 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}\Lambda_\mu(u_{\alpha\mu}\xi_\mu-v_{\alpha\mu}^*\xi_\mu^+)\\&=\sum_{1\leqslant\beta\leqslant n}\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(A_{\alpha\beta}u_{\beta\mu}\xi_\mu+A_{\alpha\beta}v_{\beta\mu}^*\xi_\mu^+\\&\quad+B_{\alpha\beta}u_{\beta\mu}^*\xi_\mu^++B_{\alpha\beta}v_{\beta\mu}\xi_\mu).\end{aligned} \tag{2.11}$$

使(2.11)的算符 ξ_μ 和 ξ_μ^+ 的数值系数相等, 就有①

$$\begin{aligned}&\sum_\beta(A_{\alpha\beta}u_{\beta\mu}+B_{\alpha\beta}v_{\beta\mu})=\Lambda_\mu u_{\alpha\mu},\\&\sum_\beta(A_{\alpha\beta}^*v_{\beta\mu}+B_{\alpha\beta}^*u_{\beta\mu})=-\Lambda_\mu v_{\alpha\mu}\end{aligned} \tag{2.12}$$

(已将第二个方程换成复共轭方程).

所以, Λ_μ 和 $u_{\alpha\mu}$、$v_{\alpha\mu}$ 是齐次线性方程组(2.12)的本征值和本

① 只要把关系式(2.11)"置入"矩阵元 $\langle 0|\cdots|1\rangle$ 和 $\langle 1|\cdots|0\rangle$ 内, 形式上方程(2.12)可以从(2.11)式得出, 这里 $|0\rangle$ 是无准粒子(准粒子真空)态: $\xi_\mu|0\rangle=0$, $\langle 0|0\rangle=1$, 而 $|1\rangle$ 是每种准粒子都有一个的态: $|1\rangle=\xi_1^+\cdots\xi_n^+|0\rangle$, $\langle 1|1\rangle=1$. 这时应当利用关系式

$$\langle 0|\xi_\mu^+|1\rangle=0,\quad \langle 0|\xi_\mu|1\rangle=1,\quad \langle 1|\xi_\mu|0\rangle=0,\quad \langle 1|\xi_\mu^+|0\rangle=1.$$

征函数.

c. 矩阵表式 利用矩阵表式可以方便地研究方程组(2.12)的解的性质. 除了矩阵 A 和 B (见 2.2 式), 现在引入变换式(2.3a)和(2.3b)的参数矩阵 $U=\|u_{\alpha\mu}\|$ 和 $V=\|v_{\alpha\mu}\|$, 以及对角矩阵 $\varLambda=\|\varLambda_{\mu}\cdot\Delta_{\mu\mu'}\|$, 并把方程组(2.12)写成如下形式:

$$\begin{aligned} AU+BV&=U\varLambda,\\ B^*U+A^*V&=-V\varLambda. \end{aligned} \tag{2.13}$$

同时应当指出, 条件(2.4)和(2.5)的矩阵式分别是:

$$U^+U-V^+V=1, \tag{2.14a}$$

$$U^TV-V^TU=0, \tag{2.14b}$$

和

$$UU^+-V^*V^T=1, \tag{2.15a}$$

$$UV^+-V^*U^T=0. \tag{2.15b}$$

下面我们最好利用分块矩阵, 其形式为

$$\mathscr{X}=\left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right), \tag{2.16a}$$

它是由 $n\times n$ 方阵按下述方式构成的, 即 $2n\times 2n$ 矩阵 $\mathscr{X}$ 是矩阵 X_{ij} 拼成的"图表"矩阵, 亦即 $\mathscr{X}=\|x_{\alpha\beta}\|(\alpha,\beta=1,\cdots,2n)$, 这里

$$x_{\alpha\beta}=\begin{cases} (X_{11})_{\alpha\beta} & 1\leqslant\alpha\leqslant n, 1\leqslant\beta\leqslant n,\\ (X_{12})_{\alpha\beta} & 1\leqslant\alpha\leqslant n, n+1\leqslant\beta\leqslant 2n,\\ (X_{21})_{\alpha\beta} & n+1\leqslant\alpha\leqslant 2n, 1\leqslant\beta\leqslant n,\\ (X_{22})_{\alpha\beta} & n+1\leqslant\alpha\leqslant 2n, n+1\leqslant\beta\leqslant 2n. \end{cases} \tag{2.16b}$$

另一方面, (2.16 a)形的矩阵可方便地看作是 2×2"超矩阵", 它的矩阵元是"子矩阵" $X_{ij}(i,j=1,2)$. 两个这样的超矩阵 $\mathscr{X}=\|X_{ij}\|$ 和 $\mathscr{Y}=\|Y_{ij}\|$ 可以按通常规则相乘:

$$\mathscr{X}\cdot\mathscr{Y}=\left\|\sum_{m=1,2}X_{im}Y_{mj}\right\| \quad (i,j=1,2). \qquad (2.17)$$

此时只应记住，一般说来，X_{im} 和 Y_{mj} 是不可对易的．还应注意(2.16a)形矩阵有如下显然的规则：

$$\mathscr{X}=\|X_{ij}\|\to\begin{cases}\mathscr{X}^{+}=\|X^{+}_{ji}\|,\\ \mathscr{X}^{*}=\|X^{*}_{ij}\|,\\ \mathscr{X}^{T}=\|X^{T}_{ji}\|.\end{cases} \qquad (2.18)$$

利用矩阵(2.16a)可以把方程组(2.13)写成一个矩阵方程：

$$\left(\begin{array}{c|c}AU+BV & 0\\ \hline B^{*}U+A^{*}V & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}U\Lambda & 0\\ \hline -V\Lambda & 0\end{array}\right), \qquad (2.19a)$$

或

$$\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B^{*} & A^{*}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline 0 & -1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\Lambda & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right), \qquad (2.19b)$$

式中 1 和 0 是 $n\times n$ 单位矩阵和 $n\times n$ 零矩阵．

d．本征值 我们用

$$W_{\mu}=\begin{pmatrix}U\\ \hline V\end{pmatrix}_{\mu}, \qquad \mu=1,\cdots,n, \qquad (2.20a)$$

表示 $2n$ 维列矢量，它与矩阵

$$W=\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V & 0\end{array}\right) \qquad (2.20b)$$

的 μ 列相同．于是方程(2.19b) 可以写成求矩阵 W_{μ} 的开头 n 列和相应的 Λ_{μ} 值的 n 个方程组：

$$\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B^{*} & A^{*}\end{array}\right)\begin{pmatrix}U\\ \hline V\end{pmatrix}_{\mu}=\left(\begin{array}{c|c}\Lambda_{\mu}\cdot 1 & 0\\ \hline 0 & -\Lambda_{\mu}\cdot 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}U\\ \hline V\end{pmatrix}_{\mu}. \qquad (2.21)$$

本征值 Λ_μ 决定于久期方程

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda\cdot 1 & B \\ \hline B^* & A^*+\lambda\cdot 1 \end{array}\right)=0 \tag{2.22}$$

确定. 式中 1 是 $n\times n$ 单位矩阵. 方程(2.22)是 λ 的 $2n$ 次代数方程，因而有$2n$ 个根.

我们首先证明,所有这些根都是实根. 根据(2.19a)式，得到

$$\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^+ \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^* & A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} (U^+U-V^+V)\Lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.23}$$

因为这个方程的左边部分是厄米的(应考虑(2.18) 式的性质和(2.17)式的规则),所以(2.23)式右边部分的矩阵也是厄米的. 因此

$$(U^+U-V^+V)\Lambda-\Lambda^+(U^+U-V^+V)=0. \tag{2.24}$$

写出矩阵等式(2.24)的对角部分,就有

$$(\Lambda_\mu-\Lambda_\mu^*)\sum_\alpha(|u_{\alpha\mu}|^2-|v_{\alpha\mu}|^2)=0,$$

因而得到

$$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu^*. \tag{2.25}$$

现在应当指出,表达式(2.25)中将出现 n 个 Λ_μ 值,可是方程(2.22)有多一倍的根. 为了阐明我们究竟需要其中的哪些根，现在仔细来研究方程(2.21). 首先证明，如果 Λ_μ 是方程组(2.21)的本征值,那么 $-\Lambda_\mu$ 也是本征值. 事实上,由(2.19)式得到

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} AU+BV & 0 \\ \hline B^*U+A^*V & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U\Lambda & 0 \\ \hline -V\Lambda & 0 \end{array}\right);$$

这些矩阵按规则(2.17)求积，并变成复共轭等式，则得

$$\left(\begin{array}{c|c} AV^*+BU^* & 0 \\ \hline B^*V^*+A^*U^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} -V^*\Lambda & 0 \\ \hline U^*\Lambda & 0 \end{array}\right). \tag{2.26}$$

比较(2.19)和(2.26)式我们看到，如果矩阵$\{\Lambda, U, V\}$满足方程(2.19)，那么矩阵$\{-\Lambda, V^*, U^*\}$也满足这个方程.

因此，方程(2.22)的$2n$个根可分成n对$(\Lambda_\mu, -\Lambda_\mu)$. 现在证明，只取每对中的一个值(或$+\Lambda_\mu$，或$-\Lambda_\mu$)并不与矩阵$U$、$V$的条件(2.14)相矛盾. 事实上，令$\{\Lambda_\mu, u_{\alpha\mu}, v_{\alpha\mu}\}$满足方程组(2.21)，这时

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(|u_{\alpha\mu}|^2-|v_{\alpha\mu}|^2)=\text{常数}>0; \tag{2.27}$$

于是$\{-\Lambda_\mu, \tilde{u}_{\alpha\mu}, \tilde{v}_{\alpha\mu}\}$(其中$\tilde{u}_{\alpha\mu}=v^*_{\alpha\mu}$, $\tilde{v}_{\alpha\mu}=u^*_{\alpha\mu}$)也是方程(2.21)的解，并且

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(|\tilde{u}_{\alpha\mu}|^2-|\tilde{v}_{\alpha\mu}|^2)=-\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(|u_{\alpha\mu}|^2-|v_{\alpha\mu}|^2)=-\text{常数}<0.$$

所以，从方程(2.22)的全部$2n$个根中只应取下述的n个Λ_μ值，即对于这些值来说，方程(2.21)相应的解$\{u_{\alpha\mu}, v_{\alpha\mu}\}$都满足条件(2.14)，而将其余的值舍去. 此时，为使(2.8)式是正定的，所取的全部值都应是(成为)严格的正值：

$$\Lambda_\mu>0, \qquad \mu=1,\cdots,n. \tag{2.28}$$

在本节的余下部分中，$\Lambda_\mu(1\leqslant\mu\leqslant n)$都理解为用上述方法选取的方程(2.22)的正根.

e. 正则变换参数遵守的条件 每个$\Lambda_\mu(\mu=1,\cdots,n)$值都对应于确定$W_\mu$的$2n$维齐次方程组(见(2.21)式)，此方程组具有非平凡解. 如果Λ_μ是非简并的(当$\nu\neq\mu$时$\Lambda_\mu\neq\Lambda_\nu$)，则确定$W_\mu$可精确到差一复常数乘子，当$\mu=\nu$时，此常数的模由条件(2.14a)确定，而相位仍是任意的. 当$\mu\neq\nu$时，条件(2.14a)自动被满足.

事实上，根据(2.24)式得到

$$(\Lambda_\nu-\Lambda_\mu)\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(u_{\alpha\mu}u^*_{\alpha\nu}-v_{\alpha\mu}v^*_{\alpha\nu})=0, \tag{2.29}$$

由此可见，当$\mu\neq\nu$时(假如 $\Lambda_\mu\neq\Lambda_\nu$)，(2.14)式是正确的. 如果$\Lambda_\mu$是$k$重简并的，

$$\Lambda_{\mu_1}=\Lambda_{\mu_2}=\cdots=\Lambda_{\mu_k}, k\leqslant n,$$

则这个 Λ_μ 值对应于方程组(2.21)非平凡解的k维线性流形. 在这种情况下，可以选取此流形中任一正交归一(就条件(2.14)来说)的基作为矩阵(2.20b)的列 W_{μ_1}、W_{μ_2}、$\cdots W_{\mu_k}$.

现在证明，在任何情况下条件(2.14b)都能自动被满足. 由(2.19)式得到

$$\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V & 0\end{array}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B^* & A^*\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V & 0\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}(V^TU-U^TV)\Lambda & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right). \tag{2.30}$$

另一方面，考虑到条件(2.18)，不难验证等式

$$\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B^* & A^*\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B^* & A^*\end{array}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right). \tag{2.31}$$

由(2.31)式得出，在转置时等式(2.30)的左边不变，因而在转置时它的右边也不变，由此得到

$$(V^TU-U^TV)\Lambda-\Lambda^T(U^TV-V^TU)=0, \tag{2.32a}$$

或用矩阵元表示:

$$-(\Lambda_\nu+\Lambda_\mu)\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(u_{\alpha\mu}v_{\alpha\nu}-v_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu})=0. \tag{2.32b}$$

由于 $\Lambda_\nu>0$, $\Lambda_\mu>0$(见(2.28)式)，由(2.32b)式可得出(2.14b)式. 因而条件(2.14)验证毕.

现在研究条件（2.15），并证明这些条件是条件(2.14)的推论．首先应指出，条件(2.14)的矩阵式等效于下列等式：

$$\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^+ \\ \hline V^T & U^T \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & -V^* \\ \hline -V & U^* \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right). \tag{2.33}$$

现在取如下形式的任意矩阵：

$$\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline X^* & 0 \end{array}\right), \tag{2.34a}$$

并建立矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline Y^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} U & -V^* \\ \hline -V & U^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline X^* & 0 \end{array}\right). \tag{2.34b}$$

利用(2.33)式，再根据(2.34b)式得到：

$$\left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline X^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^+ \\ \hline V^T & U^T \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline Y^* & 0 \end{array}\right). \tag{2.35}$$

将(2.35)式代入(2.34b)式的右边，得出等式

$$\left(\begin{array}{c|c} U & -V^* \\ \hline -V & U^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^+ \\ \hline V^T & U^T \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline Y^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline Y^* & 0 \end{array}\right). \tag{2.36}$$

由于矩阵(2.34a)的任意性，因此由(2.36)式也能得到矩阵(2.34b)，

$$\left(\begin{array}{c|c} U & -V^* \\ \hline -V & U^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^+ \\ \hline V^T & U^T \end{array}\right)$$

$$\equiv\left(\begin{array}{c|c} UU^+-V^*V^T & UV^+-V^*U^T \\ \hline -VU^++U^*V^T & -VV^++U^*U^T \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

这与用(2.15)式表示的条件(2.5)是等价的．

于是证明了，可以建立既满足方程(2.21)也满足条件(2.14)和(2.15)的矩阵 Λ、U、V．

f. 对角化 现在用直接计算来验证：正则变换(2.3)(式中参数 $u_{\alpha\mu}$、$v_{\alpha\mu}$ 由上文所述的方法决定)的结果，是二次型(2.1)变为对角形式(2.8)．将(2.7)式代入(2.1)式，得到

$$H=\sum_{\mu\nu}Q_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu+\sum_{\mu\nu}Q^*_{\nu\mu}\xi^+_\mu\xi^+_\nu+\sum_{\mu\nu}(G_{\mu\nu}\xi^+_\mu\xi_\nu+F_{\mu\nu}\xi_\mu\xi^+_\nu), \tag{2.37}$$

式中

$$Q_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}\left(A_{\alpha\beta}v_{\alpha\mu}u_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B_{\alpha\beta}v_{\alpha\mu}v_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B^*_{\alpha\beta}u_{\alpha\mu}u_{\beta\nu}\right),$$

$$G_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}\left(A_{\alpha\beta}u^*_{\alpha\mu}u_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B_{\alpha\beta}u^*_{\alpha\mu}v_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B^*_{\alpha\beta}v^*_{\alpha\mu}u_{\beta\nu}\right),$$

$$F_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}\left(A_{\alpha\beta}v_{\alpha\mu}v^*_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B_{\alpha\beta}v_{\alpha\mu}u^*_{\beta\nu}+\frac{1}{2}B^*_{\alpha\beta}u_{\alpha\mu}v^*_{\beta\nu}\right),$$

或写成矩阵形式

$$Q=V^TAU+\frac{1}{2}V^TBV+\frac{1}{2}U^TB^*U, \tag{2.38a}$$

$$G=U^+AU+\frac{1}{2}U^+BV+\frac{1}{2}V^+B^*U, \tag{2.38b}$$

$$F=V^TAV^*+\frac{1}{2}V^TBU^*+\frac{1}{2}U^TB^*V^*. \tag{2.38c}$$

现在利用 (2.2) 式的性质和方程(2.19)将这些表达式进行变换．首先研究物理量

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{2}V^T(AU+BV)+\frac{1}{2}(V^TA+U^TB^*)U\\&=\frac{1}{2}V^TU\Lambda+\frac{1}{2}(A^*V+B^*U)^TU\\&=\frac{1}{2}V^TU\Lambda+\frac{1}{2}(-V\Lambda)^TU=\frac{1}{2}(V^TU\Lambda-\Lambda V^TU),\end{aligned}$$

这时由于条件(2.14b)

$$Q^T\equiv-\frac{1}{2}(U^TV\Lambda-\Lambda U^TV)=-Q,$$

即

$$\tilde{Q}+\tilde{Q}^{T}=0 \quad 或 \quad \tilde{Q}_{\mu\nu}+\tilde{Q}_{\nu\mu}=0.$$

由此和(2.37)式得到

$$\sum_{\mu\nu} Q_{\mu\nu}\xi_{\mu}\xi_{\nu}=\sum_{\mu\nu} Q^{+}_{\nu\mu}\xi^{+}_{\mu}\xi^{+}_{\nu}=0. \tag{2.39a}$$

我们现在来变换矩阵(2.38b)和(2.38c):

$$G=\frac{1}{2}U^{+}(AU+BV)+\frac{1}{2}(U^{+}A+V^{+}B^{*})U$$

$$=\frac{1}{2}U^{+}U\varLambda+\frac{1}{2}(U\varLambda)^{+}U=\frac{1}{2}(U^{+}U\varLambda+\varLambda U^{+}U),$$

$$F=\left[\frac{1}{2}\left(V^{+}A+U^{+}B\right)V+\frac{1}{2}V^{+}(AV+B^{+}U)\right]^{T}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-V\varLambda)^{+}V+V^{+}(-V\varLambda)\right]^{T}$$

$$=-\frac{1}{2}(\varLambda V^{T}V^{*}+V^{T}V^{*}\varLambda),$$

或用其矩阵表示:

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\varLambda_{\mu}+\varLambda_{\nu})\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n} u^{*}_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}, \tag{2.39b}$$

$$F_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}(\varLambda_{\mu}+\varLambda_{\nu})\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n} v_{\alpha\mu}v^{*}_{\alpha\nu}. \tag{2.39c}$$

将(2.39b)、(2.39c)式代入(2.37)式,得到

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\left[\xi^{+}_{\mu}\xi_{\nu}(\varLambda_{\mu}+\varLambda_{\nu})\sum_{\alpha}u^{*}_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}\right.$$

$$\left.-\xi_{\mu}\xi^{+}_{\nu}(\varLambda_{\mu}+\varLambda_{\nu})\sum_{\alpha}v_{\alpha\mu}v^{*}_{\alpha\nu}\right].$$

在上式最后一项中考虑到(2.6a)式,交换算符 ξ_{μ} 和ξ^{+}_{ν},并交换下标:$\mu\rightleftarrows\nu$. 最后得到

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\xi_\mu^+\xi_\nu(\Lambda_\mu+\Lambda_\nu)\sum_\alpha(u_{\alpha\mu}^*u_{\alpha\nu}-v_{\alpha\mu}^*v_{\alpha\nu})$$
$$-\sum_{\alpha\mu}\Lambda_\mu|v_{\alpha\mu}|^2=\sum_\mu\Lambda_\mu\xi_\mu^+\xi_\mu$$
$$-\sum_{\alpha\mu}\Lambda_\mu|v_{\alpha\mu}|^2.$$

因此，

$$H=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}\Lambda_\mu\xi_\mu^+\xi_\mu+\hat{1}\cdot\mathscr{K},$$
$$\mathscr{K}=-\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}\Lambda_\mu\Big(\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}|v_{\alpha\mu}|^2\Big), \tag{2.40}$$

此式与(2.8)式相同. 从而完成了玻色二次型(2.1)的对角化.

g. 具有线性算符项的哈密顿量 最后须指出，在统计物理问题中会遇到既含有产生算符和湮没算符的二次项也含有线性项的玻色型哈密顿量：

$$H'=H+\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(C_\alpha b_\alpha^++C_\alpha^*b_\alpha), \tag{2.41}$$

式中H为二次型(2.1)，b_α^+、b_α为玻色算符，C_α、C_α^*为数值参数.

(2.41)类型的哈密顿量也能变成(2.40)式的对角形式. 为此，需要预先将(2.41)式中H的二次型部分对角化，并在线性项中借助(2.7)式变换成算符ξ_μ^+、ξ_μ. 结果得到

$$H'=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(\Lambda_\mu\xi_\mu^+\xi_\mu+D_\mu\xi_\mu^++D_\mu^*\xi_\mu)+\hat{1}\cdot\mathscr{K}, \tag{2.42a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}D_\mu&=\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(C_\alpha u_{\alpha\mu}^*+C_\alpha^*v_{\alpha\mu}^*),\\ D_\mu^*&=\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(C_\alpha^*u_{\alpha\mu}+C_\alpha v_{\alpha\mu}).\end{aligned}\right\} \tag{2.42b}$$

现在引入算符

$$\xi'_\mu = \xi_\mu + D_\mu / \Lambda_\mu, \qquad (2.43a)$$

$$\xi^{+\prime}_\mu = \xi^+_\mu + D^*_\mu / \Lambda_\mu. \qquad (2.43b)$$

显然，算符 $\xi^{+\prime}_\mu$、ξ'_μ 仍满足玻色统计的对易关系，即变换(2.43) 式是正则的；与“回转”变换(2.3)不同，这是“平移”或“位移” 变换. 在(2.42a)式中换成(2.43)式的算符，便得

$$H' = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} \Lambda_\mu \xi^{+\prime}_\mu \xi'_\mu + \hat{1} \cdot \mathscr{K}',$$

$$\mathscr{K}' = \mathscr{K} - \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} |D_\mu|^2 / \Lambda_\mu. \qquad (2.44)$$

因此，哈密顿量(2.41)变为准粒子理想气体情况的对角形式.

须指出，“平移”变换(2.43) 的正则性，是玻色统计的特有性质. 在费米统计情况下，(2.43) 型的变换已不是正则变换了. 其实，在统计力学问题中，遇不到具有费米算符线性项的哈密顿量，因为用这种哈密顿量描述的系统中，就会允许产生和湮没奇数个费米子的过程. 因此，在费米统计情况下，便不需要“平移”型的变换.

§2 费米算符二次型的对角化

任何费米产生算符和湮没算符的厄米二次型 $H = H^+$ 都可表示为

$$H = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} a^+_\mu a_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} B_{\mu\nu} a^+_\mu a^+_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} B^*_{\nu\mu} a_\mu a_\nu,$$

$$\mu, \nu = 1, \cdots, n, \qquad (2.45a)$$

式中费米算符 a^+_μ、a_μ 满足对易关系(1.27)，而数参数 $A_{\mu\nu}$ 和 $B_{\mu\nu}$ 遵从条件

$$A_{\mu\nu} = A^*_{\nu\mu}, \qquad B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}. \qquad (2.45b)$$

a. 正则变换　现在研究将(2.45a)式化成对角形式的问题. 我们引入新的算符:

$$\alpha_\omega=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(a_\mu u^*_{\mu\omega}+a^+_\mu v_{\mu\omega}),\tag{2.46a}$$

$$\alpha^+_\omega=\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(a^+_\mu u_{\mu\omega}+a_\mu v^*_{\mu\omega}),\tag{2.46b}$$

并要求满足下列的正交归一化条件①:

$$\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u^*_{\mu\omega}u_{\mu\rho}+v_{\mu\omega}v^*_{\mu\rho})=\Delta_{\omega\rho},\tag{2.47a}$$

$$\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u^*_{\mu\omega}v_{\mu\rho}+v_{\mu\omega}u^*_{\mu\rho})=0\tag{2.47b}$$

此外还要满足

$$\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}(u_{\mu\omega}u^*_{\nu\omega}+v_{\mu\omega}v^*_{\nu\omega})=\Delta_{\mu\nu},\tag{2.48a}$$

$$\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}(u_{\mu\omega}v_{\nu\omega}+v_{\mu\omega}u_{\nu\omega})=0.\tag{2.48b}$$

不难验证,条件(2.47)、(2.48)将保证变换式(2.46)具有正则性:

$$\begin{aligned}&\alpha_\omega\alpha^+_\rho+\alpha^+_\rho\alpha_\omega=\Delta_{\omega\rho},\\&\alpha_\omega\alpha_\rho+\alpha_\rho\alpha_\omega=0,\\&\alpha^+_\omega\alpha^+_\rho+\alpha^+_\rho\alpha^+_\omega=0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

利用条件(2.47)、(2.48)不难得到(2.46)式的逆变换:

$$a_\mu=\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}(u_{\mu\omega}\alpha_\omega+v_{\mu\omega}\alpha^+_\omega),\tag{2.50a}$$

$$a^+_\mu=\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}(u^*_{\mu\omega}\alpha^+_\omega+v^*_{\mu\omega}\alpha_\omega).\tag{2.50b}$$

现在我们设想,当(2.50)式中的参数 $u_{\mu\omega}, v_{\mu\omega}$ 取某些值时,(2.45)

① 如以下的证明,条件(2.48)是条件(2.47)的推论。

式化成对角形式

$$H=\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}\Lambda_{\omega}\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\omega}+\hat{1}\cdot\mathscr{F},$$
$$\Lambda_{\omega}=\Lambda_{\omega}^{*},\qquad \mathscr{F}=\mathscr{F}^{*}. \tag{2.51}$$

b. 正则变换参数方程组 这里，我们将得出在这种情况下(2.50)式的变换参数所应满足的必要条件，同时证明，这些条件并不违反(2.47)、(2.48)式的要求．由(2.49)和(2.51)式可以看出，

$$i\frac{d\alpha_{\omega}}{dt}=\Lambda_{\omega}\alpha_{\omega},\quad i\frac{d\alpha_{\omega}^{+}}{dt}=-\Lambda_{\omega}\alpha_{\omega}^{+}, \tag{2.52}$$

因此(见(2.50a)式)

$$i\frac{da_{\mu}}{dt}=\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}\Lambda_{\omega}(u_{\mu\omega}\alpha_{\omega}-v_{\mu\omega}\alpha_{\omega}^{+}) . \tag{2.53}$$

另一方面，利用哈密顿量的显式(2.45a)，得到

$$i\frac{da_{\mu}}{dt}=\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}(A_{\mu\nu}a_{\nu}+B_{\mu\nu}a_{\nu}^{+}). \tag{2.54}$$

将(2.54)式的右边借助关系式(2.50)用算符 α_{ω}^{+}、α_{ω} 表达出来，并将结果同(2.53)式的右边作比较，即得到下列方程组：

$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}(A_{\mu\nu}u_{\nu\omega}+B_{\mu\nu}v_{\nu\omega}^{*})=\Lambda_{\omega}u_{\mu\omega},$$
$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}(A_{\mu\nu}v_{\nu\omega}+B_{\mu\nu}u_{\nu\omega}^{*})=-\Lambda_{\omega}v_{\mu\omega}. \tag{2.55}$$

c. 矩阵表式 将(2.55)中的第二方程换成复共轭方程，并引入矩阵 $A=\|A_{\mu\nu}\|$、$B=\|B_{\mu\nu}\|$、$U=\|u_{\mu\omega}\|$、$V=\|v_{\mu\omega}\|$ 和 $\Lambda=\|\Lambda_{\omega}\cdot\Delta_{\omega\omega'}\|$ (Λ 为对角矩阵)，得到矩阵方程组

$$AU+BV^{*}=U\Lambda,$$
$$-B^{*}U-A^{*}V^{*}=V^{*}\Lambda. \tag{2.56}$$

其次，引入(2.16) 形的超矩阵，并将(2.56) 式合并为一个方程：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V^* & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \varLambda & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.57}$$

现在指出，由于条件(2.45b)，矩阵A和B具有如下性质：

$$A=A^+,\quad A^*=A^T, \tag{2.58a}$$

$$B=-B^T,\quad B^*=-B^+. \tag{2.58b}$$

由于(2.58)式，(2.56)式表成(2.57)形的参数矩阵是厄米的：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)^+. \tag{2.59}$$

上式也有如下的重要性质：

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)=-\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)^*. \tag{2.60}$$

这里 1 和 0 为 $n\times n$ 单位矩阵和零矩阵.

d. 本征值 现在用

$$W_\omega=\left(\begin{array}{c} U \\ \hline V^* \end{array}\right)_\omega,\qquad \omega=1,\cdots,n, \tag{2.61a}$$

表示矩阵

$$W=\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V^* & 0 \end{array}\right) \tag{2.61b}$$

的第ω列，为了确定矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} U \\ \hline V^* \end{array}\right)=\varLambda_\omega\left(\begin{array}{c} U \\ \hline V^* \end{array}\right),\qquad \omega=1,\cdots,n. \tag{2.62}$$

的前n列，可将矩阵方程(2.57)写成n个方程组的形式. 这样，便可求出作为厄米矩阵(2.62)(具有(2.59)式性质)的本征值和本征矢的$\varLambda_\omega$和W_ω.

为求 Λ_ω，我们有久期方程：

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda\cdot 1 & B \\ \hline -B^* & -A^*-\lambda\cdot 1 \end{array}\right)=0. \tag{2.63}$$

这个方程，其左边是 λ 的 $2n$ 次多项式，有 $2n$ 个根．作为厄米矩阵(2.59)的本征值，这些根都是实根．

由(2.60)式可以得出矩阵(2.59)的谱的另一个重要性质．利用(2.57)式，并考虑到

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline U^* & 0 \end{array}\right)^*,$$

不难得到

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline U^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline U^* & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} -\Lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.64}$$

由此可见，方程(2.63)的 $2n$ 个实根 Λ_ω可分成 n 对(Λ_ω, $-\Lambda_\omega$)．特别是，如果在$\{\Lambda_\omega\}$中有 $\Lambda_\omega=0$ 的根，那么它总是简并的，并且简并偶数次．

现在须指出，为了求矩阵Λ、U和V，我们需要的不是$\{\pm\Lambda_\omega\}$的全部 $2n$ 个值，而只是其中的一半(见(2.63)式)．因此我们从每对$\pm\Lambda_\omega$中只取一个，在不失一般性的情况下，此值记为 Λ_ω；如果某些对$\{\pm\Lambda_\omega\}$相同时，则可以从每对中选取同一数值作为 Λ_ω；从 $\Lambda_\omega=0$ 的偶数个根中取出一半．我们将如此得到的 n 个 Λ_ω 值列成对角矩阵Λ．而其余的$\{-\Lambda_\omega\}$的 n 个值构成矩阵$-\Lambda_\omega$．同时，由(2.64)式可以看出，作为方程(2.57)的解，如果矩阵Λ对应于矩

阵U和V^*，那么矩阵$\widetilde{\Lambda}=-\Lambda$就对应于矩阵$\tilde{U}=V$和$\tilde{V}^*=U^*$：

$$\Lambda, U, V^* \rightleftarrows -\Lambda, V, U^*. \tag{2.65}$$

e. 正则变换参数遵守的条件 现在来证明，用上述选取的矩阵Λ①，能够建立既满足方程(2.57)又满足条件(2.47)、(2.48)的矩阵U和V.

现在研究(2.57)形式的方程(2.55). 如果Λ_ω不等于零并且非简并(当$\omega=\rho$时，$\Lambda_\omega\neq\Lambda_\rho$)，则$\Lambda_\omega$由(2.63)式确定，并精确到复数因子，该因子的模由$\omega=\rho$时的附加条件(2.47a)确定，但相位仍是任意的. 现在证明，当$\omega\neq\rho$时，条件(2.47a)将自动被满足. 根据(2.57)式得到

$$\left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^T \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline V^* & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} (U^+U+V^TV^*)\Lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

由于(2.59)式，这个方程的左边是厄米的；根据方程右边的厄米性，并考虑到$\Lambda=\Lambda^+$，可得

$$(U^+U+V^TV^*)\Lambda-\Lambda(U^+U+V^TV^*)=0,$$

或

$$(\Lambda_\rho-\Lambda_\omega)\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u^*_{\mu\omega}u_{\mu\rho}+v_{\mu\omega}v^*_{\mu\rho})=0.$$

如果Λ_ω非简并，则由此得出$\omega\neq\rho$时的(2.47a)式.

如果Λ_ω不等于零并且是k重简并的，即

$$\Lambda_{\omega_1}=\Lambda_{\omega_2}=\cdots=\Lambda_{\omega_k}\neq 0,\quad k\leqslant n, \tag{2.66}$$

则对应于Λ_ω的诸本征矢构成一个k维线性流形$\mathscr{L}_k$，并且可以取$\mathscr{L}_k$中的任一正交归一化(就条件(2.47)意义上)的基作为列$\{W_{\omega_1}, W_{\omega_2}, \cdots W_{\omega_k}\}$.

---

① 由建立的方法可以看出，选取矩阵Λ具有一定的任意性. 这直接与可能存在"反射"的正则变换有关. 顺便指出，矩阵Λ总可以选为有确定符号的(根据愿望，可以非负或非正).

现在证明，对于最低限度使Λ_ω或Λ_ρ中之一不为零的那些下标ω和ρ，条件(2.47b)都将自动被满足．由(2.57)式可得出

$$\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V^* & 0\end{array}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline -B^* & -A^*\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}U & 0\\ \hline V^* & 0\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}(V^{*T}U+U^TV^*)\Lambda & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right). \qquad (2.67)$$

另一方面，考虑到(2.59)式性质，可以把关系式(2.60)写成如下形式：

$$\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline -B^* & -A^*\end{array}\right)=-\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline -B^* & -A^*\end{array}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right).$$

从而得出，(2.67)式的左边在转置时变号．考虑到这一性质，并把等式(2.67)及其转置式相加，即得出等式

$$(V^{*T}U+U^TV^*)\Lambda+\Lambda^T(V^{*T}U+U^TV^*)=0.$$

用矩阵元表示的复共轭等式具有如下形式

$$(\Lambda_\omega+\Lambda_\rho)\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u^*_{\mu\omega}v_{\mu\rho}+v_{\mu\omega}u^*_{\mu\rho})=0. \qquad (2.68)$$

如果$\Lambda_\omega\neq0$或$\Lambda_\rho\neq0$，则从建立矩阵Λ的方法可以看出，$\Lambda_\omega+\Lambda_\rho\neq0$，因而由(2.68)式得出条件(2.47b)的正确性．

现在研究一种特殊情况，即矩阵Λ的零本征值k重简并(包括$k=1$)的情况：

$$\Lambda_{\omega_1}=\Lambda_{\omega_2}=\cdots=\Lambda_{\omega_k}=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant n. \qquad (2.69)$$

在这种情况下，厄米矩阵(2.59)有$2k$个零本征值，与此对应，有本征矢((2.57)式的解)的$2k$维线性空间L^0_{2k}．现在证明，在(2.69)的情况下，也可以在矩阵W(2.61)中取有关的k个列，以满足条件(2.47)．

令$x=\{x_1,\cdots,x_{2n}\}$及$y=\{y_1,\cdots,y_{2n}\}$是L^0_{2k}中的k维列矢量．

我们用通常的方式引入数量积

$$(x, y)=\sum_{1\leqslant l\leqslant 2n} x_l^* y_l$$

和矢量的模

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}.$$

现在来证明，在L_{2k}^0中可以引入特殊形的 $2k$ 维正交归一化基，该基由两组 k 个矢量：$\{z_l, l=1, \cdots, k\}$和$\{Sz_l^*, l=1, \cdots, k\}$构成，其中用 S标记矩阵：

$$S=\left(\begin{array}{c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right). \tag{2.70}$$

于是，从正交归一的矢量系：$\{z_l\}$或$\{Sz_l^*\}$ 中足以选出一个作为待求的矢量$\{W_{\omega_i}, i=1, \cdots, k\}$.

在构成基$\{z_l\}$、$\{Sz_l^*\}$时，我们要求算符S具有如下性质：

$$S^2=1, \qquad S=S^+=S^*. \tag{2.71}$$

顺便指出，由(2.70)和(2.71)式可知，如果矢量 $x\in L_{2k}^0$，则也有矢量 $Sx^*\in L_{2k}^0$.

现在取任一归一化矢量 $x_1\in L_{2k}^0(\|x_1\|=1)$，并构造如下形式的矢量 y_1:

$$y_1=\begin{cases}\dfrac{x_1+Sx^*}{\|x_1+Sx_1^*\|}, & \text{如果 } x_1+Sx_1^*\neq 0,\\ ix_1\quad, & \text{如果 } x_1+Sx_1^*=0.\end{cases}$$

显然，$y_1\in L_{2k}^0$及$\|y_1\|=1$，此时 $y_1=Sy_1^*$. 其次，取与 y_1 正交的任一归一化矢量 $x_2\in L_{2k}^0(\|x_2\|=1)$，$(x_2, y_1)=0$. 于是矢量 Sx_2^* 也与y_1正交. 实际上，考虑到(2.71)式性质，得到

$$(Sx_2^*, y_1)=(x_2^*, Sy_1)=(x_2^*, y_1^*)=(x_2, y_1)^*=0.$$

我们构造如下矢量：

$$y_2=\begin{cases}\dfrac{x_2+Sx_2^*}{\|x_2+Sx_2^*\|}, & \text{如果}\quad x_2+Sx_2^*\neq 0,\\ ix_2\quad , & \text{如果}\quad x_2+Sx_2^*=0.\end{cases}$$

因为 $x_2\perp y_1$ 及 $Sx_2^*\perp y_1$，所以 $y_2\perp y_1$；显然也有 $\|y_2\|=1$ 和 $y_2=Sy_2^*$.

用类似的方法继续构造矢量 y_3、y_4、…，将得到 $2k$ 个矢量的正交归一化系 $\{y_i, i=1,\cdots,2k\}$，

$$(y_i,y_j)=\Delta_{ij},\qquad i、j=1,\cdots,2k, \tag{2.72a}$$

它们有如下性质：

$$y_i=Sy_i^*,\qquad y_i^*=Sy_i. \tag{2.72b}$$

现在引入 k 个矢量组成的系：

$$z_l=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2l-1}+iy_{2l}),\qquad l=1,\cdots,k. \tag{2.73}$$

利用关系式(2.72a)不难验证，这个矢量系也是正交归一化的：

$$(Z_l,Z_m)=\Delta_{lm},\qquad l、m=1,\cdots,k. \tag{2.74}$$

现在利用(2.72b)式性质并根据(2.73) 式得到 k 个矢量的第二个系：

$$Sz_l^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2l-1}-iy_{2l}),\qquad l=1,\cdots,k. \tag{2.75}$$

由矢量系 $\{z_l\}$ 的正交归一性(2.74)和算符 S 的性质(2.71) 可以得出矢量系 $\{Sz_l^*\}$ (2.75)的正交归一性：

$$(Sz_l^*,Sz_m^*)=\Delta_{lm},\qquad l、m=1,\cdots,k. \tag{2.76}$$

其次，从(2.72a)式出发，直接计算容易证实，矢量 z_l 和 Sz_m^* 对全部 l 和 m 是正交的：

$$(z_l,Sz_m^*)=\frac{1}{2}(y_{2l-1}+iy_{2l},y_{2m-1}-iy_{2m})$$

$$=\frac{1}{2}[(y_{2l-1},y_{2m-1})-(y_{2l},y_{2m})]=0. \tag{2.77}$$

关系式(2.74)、(2.76)和(2.77)表明，矢量集合$\{z_l, Sz_l^*, l=1,\cdots,k\}$是$L_{2k}^0$中的正交归一化基.特别是，由此可以得出分解$L_{2k}^0=\mathscr{L}_k^0\oplus\widetilde{\mathscr{L}}_k^0$是正确的，其中$\mathscr{L}_k^0$是$k$个矢量的矢量系$\{z_l\}$的线性壳，而$\widetilde{\mathscr{L}}_k^0$是$k$个矢量的矢量系$\{Sz_l^*\}$的线性壳；显然，这时$\mathscr{L}_k^0\perp\widetilde{\mathscr{L}}_k^0$.

我们可以选取矢量系$\{z_l\}$或矢量系$\{Sz_l^*\}$作为矩阵W(2.16b)的列，这些列对应于矩阵Λ(见(2.62)式)的零本征值(2.69).为明确起见，我们取$\{W_{\omega_i}=z_{\omega_i}\}$，于是$\{SW_{\omega_i}^*=Sz_{\omega_i}^*\}$；所以

$$W_{\omega_1}\equiv\begin{pmatrix}U\\ \hdashline V^*\end{pmatrix}_{\omega_1}=z_{\omega_1},\cdots,\quad W_{\omega_k}\equiv\begin{pmatrix}U\\ \hdashline V^*\end{pmatrix}_{\omega_k}=z_{\omega_k},\tag{2.78a}$$

$$SW_{\omega_1}^*=\begin{pmatrix}V\\ \hdashline U^*\end{pmatrix}_{\omega_1}=Sz_{\omega_1}^*,\cdots,\quad SW_{\omega_k}^*\equiv\begin{pmatrix}V\\ \hline U^*\end{pmatrix}_{\omega_k}=Sz_{\omega_k}^*.\tag{2.78b}$$

由于(2.74)、(2.76)和(2.78)式，有

$$\begin{aligned}&(W_{\omega_i}, W_{\omega_j})=\Delta_{\omega_i\omega_j},\\&(W_{\omega_i}, SW_{\omega_j}^*)=0,\end{aligned}\tag{2.79a}$$

或以矩阵元表示(见(2.78)式)，即为

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u_{\mu\omega_i}^*u_{\mu\omega_j}+v_{\mu\omega_i}v_{\mu\omega_j}^*)=\Delta_{\omega_i\omega_j},\\&\sum_{1\leqslant\mu\leqslant n}(u_{\mu\omega_i}^*v_{\mu\omega_j}+v_{\mu\omega_i}u_{\mu\omega_j}^*)=0,\end{aligned}\tag{2.79b}$$

这与条件(2.47)一致. 这样，条件(2.47)就验证完毕.

现在再来证明，条件(2.48)是条件(2.47)的推论.条件(2.47)的矩阵表示有如下形式：

$$\begin{aligned}&U^+U+V^TV^*=1,\\&U^+V+V^TU^*=0,\end{aligned}\tag{2.80}$$

而条件(2.48)可以写成下列形式:

$$\begin{aligned} UU^+ + VV^+ &= 1, \\ UV^T + VU^T &= 0. \end{aligned} \tag{2.81}$$

引入超矩阵

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c} U^+ & V^T \\ \hline V^+ & U^T \end{array}\right),$$

则可以将条件(2.79)写为

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+ = 1, \tag{2.82a}$$

由此看出,$\mathfrak{A}$ 是幺正矩阵,所以

$$\mathfrak{A}^+\mathfrak{A} = 1. \tag{2.82b}$$

把关系式(2.82b)展开,得到

$$\left(\begin{array}{c|c} UU^+ + VV^+ & UV^T + VU^T \\ \hline V^*U^+ + U^*V^+ & V^*V^T + U^*U^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

此式等价于(2.81)形式的条件(2.48).

因此我们证明了,矩阵 A、U 和 V 总可以选成既满足方程(2.55)也满足附加条件(2.47)、(2.48).

f. 关于本征矢和本征值的引理 应当指出,在研究方程(2.55)解的性质时,特别是在研究零本征值(2.69)的情况下,仅利用了矩阵

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^* & -A^* \end{array}\right), \quad S = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

的一般性质(2.59)和(2.60). 因此,将上面进行的讨论推广时,可以不费力地证明一个具有代表性和独立意义的普遍论点,这里我们以如下的引理形式表达这一论点.

引理. 我们用 R_{2n} 来表示各列矢:

$$x = (x_1, \cdots, x_{2n}),$$

$$y=(y_1,\cdots,y_{2n}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所在的 $2n$ 维欧几里得空间. 列矢的数量积为

$$(x,y)=\sum_{1\leqslant l\leqslant 2n}x_l^*y_l,$$

模为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. 令 $2n\times 2n$ 方阵 M 和 S 为 R_{2n} 空间中的算符,并满足条件

$$M=M^+,SMS=-M^*,S=S^+=S^*,S^2=1.$$

则:

1) 厄米矩阵 M 的 $2n$ 个实本征值的集合是由 n 对($\pm\Lambda_\omega$, $\omega=1,\cdots,n$)构成的. 特别是,零本征值的数目显然是偶数个.

2) 如果本征矢 X_ω 对应矩阵 M 的本征值 Λ_ω, 则矢量 SX_ω^* 也是本征矢,并且对应本征值 $-\Lambda_\omega$.

3) 可以由矩阵 M 的 n 个本征矢构成正交归一化系: $\{W_\omega$, $\omega=1,\cdots,n\}$,以致本征矢系 $\{W_\omega$、$SW_\omega^*,\omega=1,\cdots,n\}$ 是 R_{2n} 空间的正交归一化基:

$$(W_\omega,W_\rho)=\Delta_{\omega\rho},\ (SW_\omega^*,SW_\rho^*)=\Delta_{\omega\rho},$$

$$(W_\omega,SW_\rho^*)=(SW_\omega^*,W_\rho)=0.$$

此时,矢量系 $\{W_\omega\}$ 总可以选成与矩阵 M 有关的 n 个本征值都非负(或都非正).

4) 从第 3 点得出,分解 $R_{2n}=R_n\oplus\tilde{R}_n$ 是正确的. 这里 R_n 是矢量 $\{W_\omega\}$ 的线性壳, $\widetilde{R}_n$ 是矢量 $\{SW_\omega^*\}$ 的线性壳. 并且 $R_n\perp R_n$.

g. 对角化 直接计算可验证变换式(2.46)、(2.50)(其中参数 $u_{\mu\omega}$ 和 $v_{\mu\omega}$ 满足方程(2.55)和条件(2.47)、(2.48))能将哈密顿量(2.45)变为对角形式(2.51). 把(2.50)式代入(2.45)式,得到

$$H=\sum_{\mu\nu}A_{\mu\nu}\sum_{\omega\rho}(u_{\mu\omega}^*\alpha_\omega^++v_{\mu\omega}^*\alpha_\omega)(u_{\nu\rho}\alpha_\rho+v_{\nu\rho}\alpha_\rho^+)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}B_{\mu\nu}\sum_{\omega\rho}(u^*_{\mu\omega}\alpha^+_\omega+v^*_{\mu\omega}\alpha_\omega)(u^*_{\nu\rho}\alpha^+_\rho+v^*_{\nu\rho}\alpha_\rho)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}B^*_{\nu\mu}\sum_{\omega\rho}(u_{\mu\omega}\alpha_\omega+v_{\mu\omega}\alpha^+_\omega)(u_{\nu\rho}\alpha_\rho+v_{\nu\rho}\alpha^+_\rho)$$

$$=\sum_{\omega\rho}(\alpha^+_\omega\alpha_\rho G_{\omega\rho}+\alpha_\omega\alpha^+_\rho F_{\omega\rho})$$

$$+\sum_{\omega\rho}(\alpha_\omega\alpha_\rho Q_{\omega\rho}+Q^*_{\rho\omega}\alpha^+_\omega\alpha^+_\rho), \tag{2.83a}$$

其中

$$G_{\omega\rho}=\sum_{\mu\nu}\left(A_{\mu\nu}u^*_{\mu\omega}u_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B_{\mu\nu}u^*_{\mu\omega}v^*_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B^*_{\nu\mu}v_{\mu\omega}u_{\nu\rho}\right), \tag{2.83b}$$

$$F_{\omega\rho}=\sum_{\mu\nu}\left(A_{\mu\nu}v^*_{\mu\omega}v_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B_{\mu\nu}v^*_{\mu\omega}u^*_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B^*_{\nu\mu}u_{\mu\omega}v_{\nu\rho}\right), \tag{2.83c}$$

$$Q_{\omega\rho}=\sum_{\mu\nu}\left(A_{\mu\nu}v^*_{\mu\omega}u_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B_{\mu\nu}v^*_{\mu\omega}v^*_{\nu\rho}+\frac{1}{2}B^*_{\nu\mu}u_{\mu\omega}u_{\nu\rho}\right). \tag{2.83d}$$

现在将表达式 (2.83b)—(2.83d) 写成矩阵形式，并利用方程(2.56)和条件(2.58)，对它们进行变换，则有

$$G=U^+AU+\frac{1}{2}U^+BV^*+\frac{1}{2}V^TB^+U$$

$$=\frac{1}{2}U^+(AU+BV^*)+\frac{1}{2}(AU+BV^*)^+U$$

$$=\frac{1}{2}(U^+U\Lambda+\Lambda U^+U), \tag{2.84a}$$

$$F=V^+AV+\frac{1}{2}V^+BU^*+\frac{1}{2}U^TB^+V$$

$$=\frac{1}{2}V^+(AV+BU^*)+\frac{1}{2}(V^+A+U^TB^+)V$$

$$=\frac{1}{2}V^+(-V\Lambda)+\frac{1}{2}(-V\Lambda)^+V$$

$$=-\frac{1}{2}(V^+V\Lambda+\Lambda V^+V), \tag{2.84b}$$

$$Q=V^{+}AU+\frac{1}{2}V^{+}BV^{*}+\frac{1}{2}U^{T}B^{+}U$$

$$=\frac{1}{2}V^{+}(AU+BV^{*})+\frac{1}{2}(V^{+}A+U^{T}B^{+})U$$

$$=\frac{1}{2}(V^{+}U\Lambda-\Lambda V^{+}U). \tag{2.84c}$$

用矩阵元来表示，等式(2.84a)和(2.84b)有如下形式：

$$G_{\omega\rho}=\frac{1}{2}(\Lambda_{\omega}+\Lambda_{\rho})\sum_{\mu}u_{\mu\omega}^{*}u_{\mu\rho}, \tag{2.85a}$$

$$F_{\omega\rho}=-\frac{1}{2}(\Lambda_{\omega}+\Lambda_{\rho})\sum_{\mu}v_{\mu\omega}^{*}v_{\mu\rho}. \tag{2.85b}$$

利用对易关系式(2.49)和条件(2.47a)，并根据(2.85)式可有

$$\sum_{\omega\rho}(\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\rho}G_{\omega\rho}+\alpha_{\omega}\alpha_{\rho}^{+}F_{\omega\rho})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\omega\rho}(\Lambda_{\omega}+\Lambda_{\rho})\left(\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\rho}\sum_{\mu}u_{\mu\omega}^{*}u_{\mu\rho}-\alpha_{\omega}\alpha_{\rho}^{+}\sum_{\mu}v_{\mu\omega}^{*}v_{\mu\rho}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\omega\rho}(\Lambda_{\omega}+\Lambda_{\rho})\left[\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\rho}\sum_{\mu}(u_{\mu\omega}^{*}u_{\mu\rho}+v_{\mu\omega}v_{\mu\rho}^{*})\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu}|v_{\mu\omega}|^{2}\Delta_{\omega\rho}\right]=\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}\Lambda_{\omega}\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\omega}$$

$$-\sum_{1\leqslant\omega\leqslant n}\Lambda_{\omega}\left(\sum_{\mu}|v_{\omega\mu}|^{2}\right). \tag{2.86}$$

其次，利用(2.84c)式和(2.79)中的第二条件，可得到

$$Q^{T}=\frac{1}{2}(\Lambda U^{T}V^{*}-U^{T}V^{*}\Lambda)=\frac{1}{2}(-\Lambda V^{+}U+V^{+}U\Lambda)=Q,$$

或用矩阵元表示：

$$Q_{\omega\rho}=Q_{\rho\omega}. \tag{2.87}$$

考虑到对易关系式(2.49)，从而得到

$$\sum_{\omega\rho}Q_{\omega\rho}\alpha_{\omega}\alpha_{\rho}=\sum_{\omega\rho}Q_{\rho\omega}^{*}\alpha_{\omega}^{+}\alpha_{\rho}^{+}=0. \tag{2.88}$$

根据(2.83)、(2.86)和(2.88)式，最后得到

$$H = \sum_{1 \leqslant \omega \leqslant n} \Lambda_\omega \alpha_\omega^+ \alpha_\omega + \hat{1} \cdot \mathscr{F}, \tag{2.89a}$$

$$\mathscr{F} = -\sum_{1 \leqslant \omega \leqslant n} \Lambda_\omega \left(\sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} |v_{\mu\omega}|^2 \right). \tag{2.89b}$$

就此，我们结束对一般形式的费米二次型（2.45）对角化方法的叙述.

第三编参考文献

1. Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести. —Известия АН СССР, Физика, 1947, т. 11, No 1, с. 77.
2. Боголюбов Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости. —ЖЭТФ, 1958, т. 34, No 1, с. 58.
3. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. —Препринт Д-781, ОИЯИ, Дубна, 1961; переиздано: Избранные труды по статистической физике. —М.: Изд-во Московского университета, 1979.
4. Боголюбов Н. Н. Лекции по квантовой статистике. —Киев: Радянська школа, 1949; переиздано: Избранные труды в трех томах. —Киев: Наукова думка, 1970, т. II.
5. Gaudin M. Nuclear Physics, 1960, v. 15, p. 89.
6. Westwanski B., Pawlikowski A. Phys. Lett., 1973, v. 43A, N. 2.
7. Bakc В. Г., Ларкин. А. И., Пикин С. А. ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 281, 1089.
8. Изюмов Ю. А., Кассан-оглы Ф. А. ФММ, 1970, т. 30, с. 225.

第四编 超流性和统计力学问题中的准平均

第一章 超流性和非理想玻色气体

§1 理想玻色气体

现在我们研究玻色-爱因斯坦气体的性质，即研究由遵从玻色统计的全同粒子所构成的宏观动力学系统的性质，这种粒子之间相互作用可认为是足够小的.

首先讨论不计粒子间相互作用的理想气体情况. 这样，系统的总哈密顿量仅由单个粒子的个体能量之和构成；变为二次量子化表象时，可以写成(第二编第四章)($\hbar=1$)：

$$H=\sum_{p}\frac{p^{2}}{2m}b_{p}^{+}b_{p}. \tag{1.1}$$

假设系统储于容积$V=L^{3}$之中. 动量p取通常的准离散值

$$p=\frac{2\pi}{L}(n_{1},n_{2},n_{3}), \tag{1.2}$$

其中$n_{\alpha}(\alpha=1,2,3,)$为整数，$b_{p}$、$b_{p}^{+}$表示动量为$p$的单粒子态的.湮没算符和产生算符。我们将研究系统当容积V和粒子数N都趋于无穷大、而比值$N/V=\rho$恒定时的极限情况下的性质.

我们将不研究哈密顿量H，而是研究巨正则系综算符

$$\Gamma=H-uN, \tag{1.3}$$

式中μ表示化学势．此时我们无须要求粒子数N守恒．在统计平衡态，处于动量为p的状态的平均粒子数由如下熟知的公式给出：

$$\langle b_p^+ b_p\rangle = \langle n_p\rangle = \left[\exp\left(\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)\cdot\frac{1}{\theta}\right)-1\right]^{-1}, \qquad (1.4)$$

其中$\theta=kT$，T为温度，k为玻尔兹曼常数．应当指出，这里$\mu<0$，否则，有的占据数$\langle n_p\rangle$将成为负的．我们可根据如下方程确定μ：

$$\frac{1}{V}\sum_p\langle n_p\rangle=\rho=\frac{N}{V}. \qquad (1.5)$$

现在我们从理想玻色-爱因斯坦气体凝聚的简单例子开始讨论．为方便起见，除去凝聚体，将理想气体哈密顿量(1.3)写成如下形式：

$$\Gamma=-\mu b_0^+ b_0+\sum_{|p|>\varepsilon}\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)a_p^+ a_p, \qquad \varepsilon>0.$$

这里，在取极限$V\to\infty$后，再使量ε趋于零．

考虑平均占据数$\langle n_p\rangle$的公式(1.4)，对于$p=0$和$p\neq0$的情况都可以看出$\mu<0$．用N表示总粒子数，则有

$$\frac{N}{V}=\frac{N_0}{V}+\frac{1}{V}\sum_{|p|>\varepsilon}\left[\exp\left(\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)\frac{1}{\theta}\right)-1\right]^{-1}, \qquad (1.5\text{a})$$

式中$\mu=-\theta\ln\left(1+\frac{1}{N_0}\right)$.

现在研究玻色-爱因斯坦凝聚的情况，这时$n_0=\lim\frac{N_0}{V}$是有限的非零的量．在这种情况下，在公式(1.5a)中取极限，求得

$$n=\lim\frac{N}{V}=n_0+\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|p|>\varepsilon}\left(\exp\frac{p^2}{2m\theta}-1\right)^{-1}dp.$$

这里将“切断的动量”ε趋于零，最后得到

$$n=n_0+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\exp\frac{p^2}{2m\theta}-1\right)^{-1}dp. \qquad (1.6)$$