上一节课 $\begin{cases} B、F \text{ 对角化} \\ \text{一步一步法则} \end{cases}$

费米子

$F \Rightarrow U \Rightarrow F \to F$

$B \Rightarrow$ ~~$U=$~~ $U^{\dagger} \Sigma U = \Sigma$

$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$H = t_{ij} C_i^{\dagger} C_j + \Delta_{ij} C_i^{\dagger} C_j^{\dagger} + h.c.$$

$\hat{H} = \Sigma H$，非厄米。

☆一句话 $B \to B$，$F \to F$

今天的任务：$\begin{cases} SC \text{ (Superconductor)}, & F \\ SF \text{ (Superfluids,)}, & B \\ \text{Heisenberg model} & B. \\ \text{Dicke model}. & \end{cases}$

如果对角化得到更能谱。

大多数都可以解析计算

与

$$H = \omega(a^{\dagger}a + b^{\dagger}b) + \lambda(a^{\dagger}b^{\dagger} + h.c.).$$

相关， a、b 可能是 Boson，也可能是费米子。

大多数讨论都是在平均场框架下的讨论，有很好的实用性。

参考文献. ① Fran E. Utermohlen. "Spin-wave theory using H-P transformation", 2020.

② Emary. Brandes. PRE. 67.066203(2003).

③ 书中《固体理论》超导部分.

④ Bogoliubov Theory of the weakly interacting Bose Gas.

Models ① 超导

$$H = \sum_{ks} \varepsilon_{ks} C_{ks}^\dagger C_{ks} + (\Delta C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger + h.c.)$$

$$= \sum_k H_k$$

其中, $H_k = \varepsilon_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^\dagger C_{k\uparrow} + \varepsilon_{k\downarrow} C_{-k\downarrow}^\dagger C_{-k\downarrow}$

$$+ \Delta C_{k\uparrow}^\dagger C_{-k\downarrow}^\dagger + h.c.$$

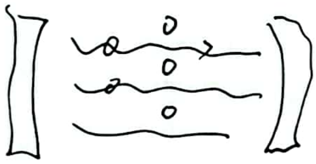
令 $a = C_{k\uparrow}$, $b = C_{-k\downarrow}$, 可以前面的模型相对应.

② Dicke model.

~~一个 Boson 一个~~

一个 Boson 模式 和 许多自旋.

$$H = \omega b^\dagger b + \sum_i \Omega_z S_i^z + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_i (b^\dagger S_i^- + h.c.)$$



腔场中的原子.

定义 $S^\alpha = \sum_i S_i^\alpha \Leftrightarrow S^z = \sum_i S_i^z$.

$$\Rightarrow H = \omega b^\dagger b + \Omega S^z + \frac{g}{\sqrt{N}} (b^\dagger S^- + h.c.)$$

$$S^z |m\rangle = m |m\rangle, \quad |m| < \frac{N}{2}.$$

$g = 0$ 时, $|0, \downarrow\downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$ 基态.

$|1, \downarrow\downarrow \cdots \downarrow\rangle$ or $|0, \downarrow\uparrow \cdots \downarrow\rangle \cdots$

第一激发态

Holstein-Primakoff 变换

$$S^+ = a^+\sqrt{N-a^+a}\ ,\quad S^- = \sqrt{N-a^+a}\ a$$

$$S^z = (S^+S^- - S^-S^+)/2 = a^+a - N/2.$$

可以证 H-P 变换保持自旋的对易关系

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \omega b^+b + \Omega(a^+a - N/2) + \frac{g}{\sqrt{N}}(\underbrace{b^+\sqrt{N-a^+a}\,a + a^+\sqrt{N-a^+a}\cdot b})$$

$$\approx \omega b^+b + \Omega(a^+a - N/2) + \frac{g}{\sqrt{N}}(b^+\sqrt{N}a + a^+\sqrt{N}b)$$

$$= \omega b^+b + \Omega(a^+a - N/2) + g(b^+a + a^+b).$$

$$\mathcal{H} \approx (a^+\ b^+)\begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad E_{\pm} = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{g^2 + \frac{(\omega-\Omega)^2}{4}}$$

有可能不稳定. $\frac{\omega+\Omega}{2} < \sqrt{g^2 + (\frac{\omega-\Omega}{4})^2} \Rightarrow \omega\Omega < g^2$ 新状态的产生.

③ Heisenberg Model. (不能多精确求解.

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j$$

$$\begin{cases} J>0, & \uparrow\uparrow\uparrow\cdots\uparrow. \\ J<0; & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \end{cases}$$

考虑 $J>0$.

$$\vec S_i\cdot\vec S_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z$$

$$= \frac{1}{2}(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) + S_i^z S_j^z$$

再利用 H-P 变换，$a_i^\dagger = S_i^+$，$a_i = S_i^-$，$S_i^z = a_i^\dagger a_i - \frac{1}{2}$)

$$H = -J\sum_{\langle ij\rangle}\frac{1}{2}(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i) + (a_i^\dagger a_i - 1/2)(a_j^\dagger a_j - 1/2).$$

$$= -J\sum_{\langle ij\rangle}\frac{1}{2}\left(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i + 2a_i^\dagger a_i a_j^\dagger a_j - (a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j) + 1/2\right)$$

当我们关注低温时，$\langle a_i^\dagger a_i\rangle$ 的数目很少，我们忽略掉相互作用项 $a_i^\dagger a_i a_j^\dagger a_j$.

$$\Rightarrow H \approx -J\sum_{\langle ij\rangle}\frac{1}{2}(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i - a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j) + \text{const}$$

可以利用平移对称性求解.

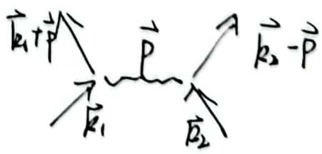
□

④. 超流 (SF).

假设 $V(x-y) = V\delta(x-y)$

$$H = \int dx\, \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^\dagger\cdot\nabla\psi + \frac{1}{2}\int \psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)V(x-y)\psi(y)\psi(x)\,dx\,dy$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{i\vec k\cdot\vec x}a_k.$$



$$= \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}a_k^\dagger a_k + \frac{V}{2}\sum_{k_1,k_2,p} a_{k_1+p}^\dagger a_{k_2-p}^\dagger a_{k_2} a_{k_1}$$

我们考虑低温时的情况，大量粒子处在基态，则 $a_0^\dagger a_0 = N_0 \gg 1$.

弱相互作用

假设 $a_0 \sim \sqrt{N_0}$.

则相互作用项中　　　　　　$p_1, p_2, q = 0$.

$a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 \sim N^2$.　　　　　　3个0

$a_q^\dagger a_{-q}^\dagger a_0 a_0 + a_0^\dagger a_0^\dagger a_{-q} a_q$.

$a_p^\dagger a_p a_0^\dagger a_0$.

保留主要项，则

$$H = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + N_0 V_0 \sum_p (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + h.c.) + V N_0 \sum_p a_p^\dagger a_p$$

$$= \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} + V_0 N_0\right) a_p^\dagger a_p + V_0 N_0 \sum_p (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + h.c.)$$

$$= \sum_p H_p.$$

$$H_p = \underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} + V_0 N_0\right)} a_p^\dagger a_p + V_0 N_0 (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + h.c.)$$

$$= \varepsilon_p a_p^\dagger a_p + \varepsilon_{-p} a_{-p}^\dagger a_{-p} + V_0 N_0 (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + h.c.)$$

与前述模型也有相似性.

总结：对于很多模型，在一些近似下，积化为下列问题的解。

$$\mathcal{H} = \varepsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b + h.c.)$$

或者

$$\mathcal{H} = \varepsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b^\dagger + h.c.) \quad \text{Bogoliubov 变换}$$

所有问题将转化为对 $\mathcal{H}(a,b)$ 的求解。

Fermion.

$$\mathcal{H} = \varepsilon(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b^\dagger + h.c.)$$

$$= \frac{1}{2}(a^\dagger, b^\dagger, a, b)\left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \varepsilon & -\lambda & 0 \\ \hline 0 & -\lambda & -\varepsilon & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -\varepsilon \end{array}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ a^\dagger \\ b^\dagger \end{pmatrix} + const$$

$$\begin{cases} a = u\alpha + v\beta^\dagger \\ b = x\beta + y\alpha^\dagger \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{a, a^\dagger\} = 1 & |u|^2 + |v|^2 = 1 \\ \{b, b^\dagger\} = 1 & |x|^2 + |y|^2 = 1 \\ \{a, b\} = 0. & uy + xv = 0. \end{cases}$$

令 $\begin{cases} y = v \\ x = -u. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^\dagger \end{pmatrix}$

~~$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ & u \end{pmatrix}$~~

反解出

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix}.$$

代回原方程则有.

令非对角项为零.

$$\mathcal{H} = E_k \alpha^\dagger \alpha + E_k \beta^\dagger \beta + const, \quad E_k \text{与 } u, v \text{ 有关}.$$

$$E = (u^2 - v^2)\varepsilon + 2uv\lambda$$

非对角项满足方程.

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ 2\varepsilon uv-(u^2+v^2)\lambda=0 \end{cases}$$

故。

设 $u=\cos\theta$, $v=\sin\theta$ $\Rightarrow$ $\sin(2\theta)=\dfrac{\lambda}{\varepsilon}$

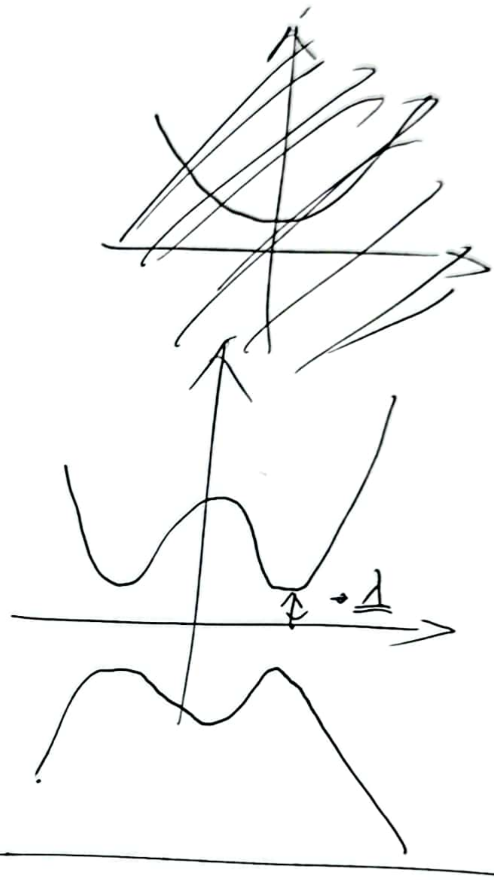
$\Rightarrow$ u、v 的解.

最终的解是.

$$E=\pm\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}.$$

↑

有个能隙.



Boson.

$$H=\varepsilon(a^\dagger a+b^\dagger b)+\lambda(a^\dagger b^\dagger+h.c.)$$

$\begin{cases} a=u\alpha+v\beta^\dagger \\ b=x\beta+y\alpha^\dagger. \end{cases}$ 必有 $x=u$, $y=v$. 则有 $u^2-v^2=1$.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} a=u\alpha+v\beta^\dagger \\ b=u\beta+v\alpha^\dagger \end{cases}$ 代回 Hamiltonian 有.

非对角项满足的方程.

$$\begin{cases} 2\varepsilon uv + \lambda(u^2+v^2) = 0. \\ u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$$

令 $u = \cosh(\theta)$
$v = \sinh(\theta)$

对角项有

$\Rightarrow \quad E = \ldots\ldots$

$$H = E(\alpha^+\alpha + \beta^+\beta)$$

结论. 在 SC. SF. Heisenberg 中做合理近似, 均可归为下列问题的解

$$\begin{cases} H = \varepsilon(a^+a + b^+b) + \lambda(a^+b^+ + h.c.) \\ \text{or} \\ H = \varepsilon(a^+a + b^+b) + \lambda(a^+b + h.c.). \end{cases}$$