Review 平均场 → 自洽求解

| 磁性
| 超导

方法是非唯一的.

---

① Exact diagonalization
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Spin} \\ \text{Fermion} \longrightarrow \text{Hilbert空间} \\ \text{Boson} \end{array}\right.$$

②
$$\begin{tikzcd} & \text{spin} \arrow[dl, shift left, "\text{Jordan-Wigner}"'] \arrow[dr, "\text{H-P变换}"] & \\ \text{Fermion} \arrow[ur, shift left] \arrow[rr] & & \text{Boson} \end{tikzcd}$$

③ Bethe-Ansatz 求解. Ref: Nagaosa "QFT in strongly correlated electron system"

ED. $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, $|\psi\rangle = \sum_n C_n |\psi_n\rangle$

Model. (1d)

① Spin $H = -J\sum_i \left(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta S_i^z S_{i+1}^z\right)$

② Fermion. spinless. $H = -t\sum_i (a_i^\dagger a_{i+1} + h.c.) + U n_i n_{i+1} - \mu n_i$

③ Boson $H = -t\sum_i (a_i^\dagger a_{i+1} + h.c.) + \frac{U}{2} n_i(n_i - 1)$

第一，判断对称性，是否有守恒量

Spin. $S^z = \sum_j S_j^z$，总自旋数，

Fermion、Boson $N = \sum_i a_i^\dagger a_i$，总粒子数

Spin $\quad C_L^0 \quad C_L^1 \quad C_L^2 \quad \cdots\cdots$ 基矢 $\{|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, \cdots\cdots\}$

$K = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \cdots\cdots$

总的希尔伯特空间可以分解为0个自旋向上的，1个自旋向上的，……，等不同自旋向上数的子空间的直和。

Fermion

守恒量。$\hat{N} = \sum_j c_j^\dagger c_j$，

$\hat{N} = 0$，$|00000\rangle$． $L = 5$. 作为例子.

$\hat{N} = 1$，$|10000\rangle$，$|01000\rangle$，$|00100\rangle$，……

$\hat{N} = 2$．$|11000\rangle$，……

$K = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \cdots\cdots$

Boson $\quad \hat{N} = \sum_j a_j^\dagger a_j$，$[\hat{N}, \hat{H}] = 0$

$\hat{N} = 0$，$|00000\rangle$

$\hat{N} = 1$，$|10000\rangle$，……

$\hat{N} = 2$，$|20000\rangle$，……

$|11000\rangle$，……

玻色子的基矢数目增长速度会快很多。

玻色子可以在同一个格点上。

作业： $L=5$, $N=2$,

求以上二个模型的本征值，

参数自定

Dicke Model

$$H = \omega a^+a + \Omega\sigma^z + g(a^+\sigma^- + h.c.) + Un(n-1)$$

守恒量 $N = a^+a + \sigma^z$

$\hat{N} = 0$, $|0,\downarrow\rangle$

$\hat{N} = 1$, $|1,\downarrow\rangle$, $|0,\uparrow\rangle$

$\hat{N} = 2$, $|2,\downarrow\rangle$, $|1,\uparrow\rangle$

⋮

整个系统可以分解为不同的小的子空间。

可以严格求解。

以 $L=2$, $N=2$ 为例，求解。

$$H = -J\sum_i (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta S_i^z S_{i+1}^z)$$

基矢的数目. $K = C_5^2 = 10$,

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \\ |\varphi_2\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle \\ |\varphi_3\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

⋮

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n|\varphi_n\rangle$$

① $-J\sum_i \Delta S_i^z S_{i+1}^z |\Psi\rangle = \sum_n C_n \cdot A_n |\varphi_n\rangle$

是对角的

② $-J\sum_i \frac{1}{2}(S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+)|\Psi\rangle = \sum_n C_n \cdot B_n |\varphi_n\rangle$

非对角的

$$S^+S^- \quad \downarrow\uparrow \to \uparrow\downarrow$$

$$S^-S^+ \quad \uparrow\downarrow \to \downarrow\uparrow$$

例

$$-J\sum_i \frac{1}{2}(S_i^+S_{i+1}^- + S_i^-S_{i+1}^+)\,|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

$$= -J\,\frac{1}{2}(S_2^-S_3^+)\,|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = -J\cdot\frac{1}{2}\,|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$$

Jordan-Wigner 变换

$0 \to \downarrow$, $1 \to \uparrow$

自旋的 Hilbert 空间和费米子的 Hilbert 空间有一一对应,

自旋的代数和费米子不同

$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\epsilon^{\alpha\beta\mu} S^\mu$, 对易

$\{c_i, c_j^+\} = \delta_{ij}$, 反对易

$$S_i^+|s_1, s_2, \cdots, s_N\rangle = (\tfrac{1}{2}-s_i)\,|s_1, \cdots, s_i+1, \cdots, s_N\rangle$$

$$c_i^+|n_1, n_2, \cdots, n_N\rangle = \underline{(-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{i-1}}}\,(1-n_i)\,|n_1, n_2, \cdots, n_i+1, \cdots\rangle$$

$\Uparrow$

string

猜测

$$\begin{cases} S_i^+ = e^{i\pi\sum_{j=1}^{i-1} a_j^+a_j}\, a_i^+ \\ S_i^- = a_i\, e^{-i\pi\sum_{j=1}^{i-1} a_j^+a_j} \\ S_i^z = a_i^+a_i - \frac{1}{2} \end{cases}$$

可以验证,且仅当剧满足各自的代数关系。