平均场理论和自洽计算.

有个设的应用

$$AB = \bar{A}B + A\bar{B} - \bar{A}\bar{B} + \underline{\delta A \delta B}$$ 丢失了关联

$$x^2 + ax^{15} = b$$

一个迭代是

$$x_{n+1}^2 = b - a x_n^{15}$$

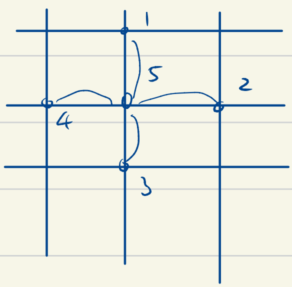
另个做法.

$$x^2 + a x^2 \bar{x}^{13} = b$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{b}{1 + a\bar{x}^{13}}$$

Ising Model.

$$H = -J\sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h\sum_i \sigma_i$$

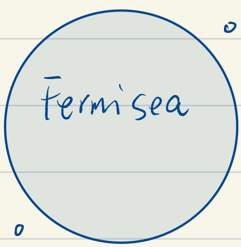


自旋5感受到周围的自旋对它的相互作用

$$-J\sigma_5(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)$$

$$= -\sigma_5 H_{eff}$$

超导理论. (BCS 理论)



在费米海上的两个电子间的任意弱的吸引相互作用都会使得其形成一个新的束缚态.

cooper pair.

$$\mathcal{H} = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{ks} \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) C^{+}_{ks} C_{ks}$$

$$V = \int dx\,dy\ \Psi^{+}_{\uparrow}(x)\,\Psi^{+}_{\downarrow}(y)\,V(x-y)\,\Psi_{\downarrow}(y)\,\Psi_{\uparrow}(x) \qquad g>0$$

$$= -g\int dx\ \Psi^{+}_{\uparrow}(x)\,\Psi^{+}_{\downarrow}(x)\,\Psi_{\downarrow}(x)\,\Psi_{\uparrow}(x) \qquad \text{令 } V(x-y) = \underline{\underline{-g}}\,\delta(x-y)$$

$$= -g \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} C^{+}_{k_1\uparrow} C^{+}_{k_2\downarrow} C_{k_3\downarrow} C_{k_4\uparrow} \int dx\, e^{-i(k_1+k_2-k_3-k_4)x}$$

$$= -g \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} C^{+}_{k_1\uparrow} C^{+}_{k_2\downarrow} C_{k_3\downarrow} C_{k_4\uparrow}\, \delta(k_1+k_2-k_3-k_4)$$

$$= -g \sum_{k_1 k_2 k_3} C^{+}_{k_1+k_3\uparrow} C^{+}_{k_2-k_3\downarrow} C_{k_2\downarrow} C_{k_1\uparrow}$$

考虑主导的散射的过程.

$$V = -g \sum_{kp} \underline{C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} C_{-p\downarrow} C_{p\uparrow}}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{ks} (\varepsilon_{ks} - \mu)\, C^{+}_{ks} C_{ks} - g \sum_{kp} C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} C_{-p\downarrow} C_{p\uparrow}$$

平均场的处理

$$\sum_{kp} \left(C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} \right)\left(C_{-p\downarrow} C_{p\uparrow} \right) = \Delta \sum_{p} C_{-p\downarrow} C_{p\uparrow} + \Delta^{*} \sum_{p} C^{+}_{p\uparrow} C^{+}_{-p\downarrow} - |\Delta|^2$$

$$H=\sum_{ks}(\varepsilon_{ks}-\mu)C^{\dagger}_{ks}C_{ks} - g\sum_{k}\left(C^{\dagger}_{k\uparrow}C^{\dagger}_{-k\downarrow}\Delta + \Delta^{*} C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right)+Ng|\Delta|^2$$

$$=\sum_{k} H_k + Ng|\Delta|^2$$

而 $H_k = (\varepsilon_{k\uparrow}-\mu)C^{\dagger}_{k\uparrow}C_{k\uparrow}+(\varepsilon_{k\downarrow}-\mu)C^{\dagger}_{k\downarrow}C_{k\downarrow}$

$- g\Delta C^{\dagger}_{k\uparrow}C^{\dagger}_{-k\downarrow} - g\Delta^{*} C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}$

↑

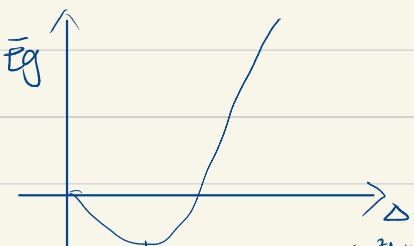
BdG方程或者 Bogoliubov 变换求解

$$E_k=\pm\sqrt{(\varepsilon_k-\mu)^2+g^2|\Delta|^2}$$

相变点由 C=0 来确定

$$E_g=\sum_k \xi_k-\sqrt{\xi_k^2+g^2|\Delta|^2}+g|\Delta|^2 \Rightarrow \underbrace{B+C|\Delta|^2+D|\Delta|^4}$$

相变点 $\Rightarrow \sum_k\left(-\frac{1}{g}+\frac{g^2}{2|E_k|}\right)=0$



$\Delta\neq 0$ 在某些情况下

应用: Tight-Binding Model. $U n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}+V n_{is}n_{js}$

相互作用形式是

① $\bar{n}_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow} + \bar{n}_{i\downarrow} c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow}$ ，排序

② $\Delta c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} + h.c. - |\Delta|^2/U$ 吸引