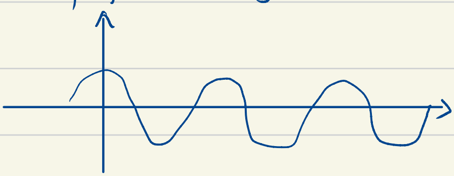
Review

总结. cannical quantization.

$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$N\to\infty$ 自由度

$$\begin{cases} [\phi(x),\pi(y)] = i\hbar\,\delta(x-y) \\ \{\psi(x),\pi(y)\} = i\hbar\,\delta(x-y) \end{cases}$$



Dirac 推导

$\psi = \sum_n C_n \varphi_n(x)$

$\downarrow$

$\psi' = \sum_n C_n' \varphi_n(x)$

$\hat{\psi} = \sum_n \hat{C}_n \varphi_n(x)$

今天讲如何计算

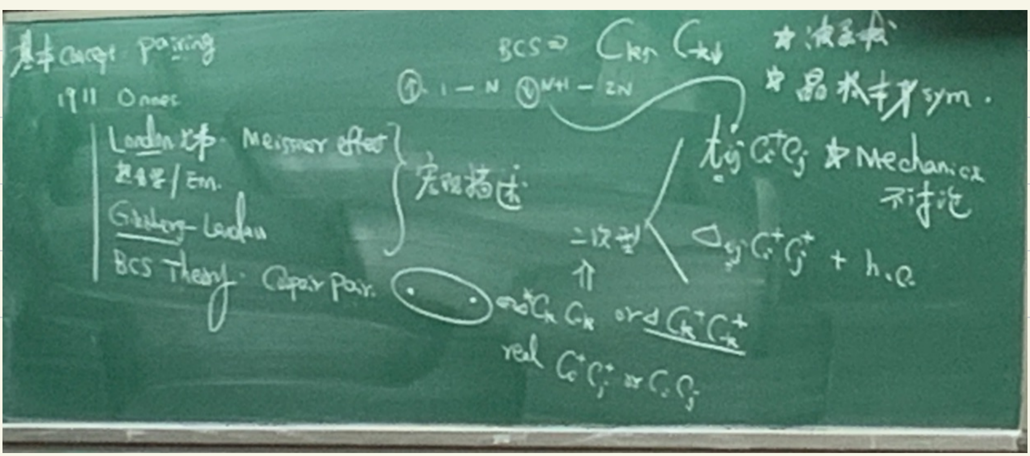
和经典粒子的相似性.

未来 → 多体相互作用系统

各种 $\begin{cases} \text{实空间/动量空间} \\ \text{Boson/Fermion} \end{cases}$ ⇒ 二次型的对角化.

在对角化中要求不改变粒子的统计性质。

Bogoliubov 变换 和 BdG 方程.



一个例子.

$$H=-\mu\sum_i C_i^\dagger C_i + \sum_i t C_i^\dagger C_{i+1} + h.c.$$

矩阵.

$$H=(C_1^\dagger, C_2^\dagger, \cdots)\begin{pmatrix} -\mu & t & & & \\ t & -\mu & t & & 0 \\ & t & -\mu & t & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \gamma^\dagger[\lambda]\gamma$$

$$=\sum_i \lambda_i \gamma_i^\dagger \gamma_i$$

可以利用幺正变换对角化

此系统中的 Hilbert 空间是? ，对于 $N=1$ 时的情况. Boson 和 Fermion 无区别

$$\begin{cases} |10000\cdots\rangle = C_1^\dagger|0\rangle \\ |010\cdots\cdots\rangle = C_2^\dagger|0\rangle \\ \vdots \end{cases}$$

$$\psi=\sum_i \xi_i C_i^\dagger|0\rangle$$

$$\Rightarrow\quad H\psi=E\psi$$

$$H\psi=\sum_i\left(-\mu\sum_j C_j^\dagger C_j + t\sum_j C_j^\dagger C_{j+1} + h.c\right)\xi_i C_i^\dagger|0\rangle\ ;\quad E\psi=\sum_i \xi_i C_i^\dagger|0\rangle$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum_i -\mu\,\xi_i C_i^\dagger|0\rangle + t\left(\xi_i C_{i+1}^\dagger|0\rangle + \xi_i C_{i-1}^\dagger|0\rangle\right);\quad \sum_i \xi_i C_i^\dagger|0\rangle$$

对比 $C_i^\dagger|0\rangle$ 系数 $\Downarrow$

$$\boxed{-\mu\,\xi_i + t\left(\xi_{i+1} + \xi_{i-1}\right) = E\,\xi_i}$$

可以写成一个三对角矩阵.

处理.

① $H=\sum_i -\mu_i c_i^\dagger c_i - t\sum_i c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i$

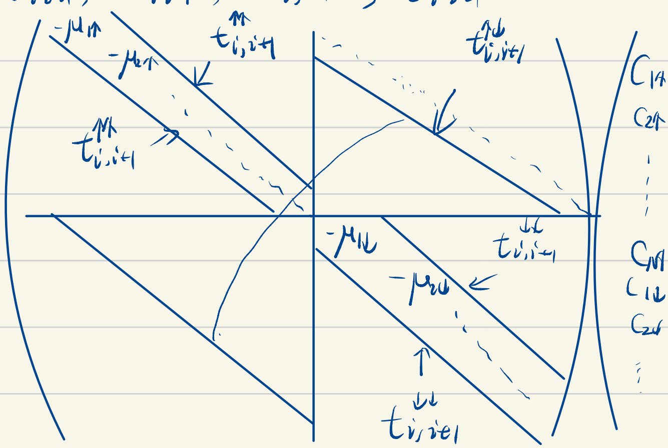
② $H=-\sum_i \mu_{i\sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} + \sum_{\substack{ij\\ \sigma\sigma'}} t_{ij}^{\sigma\sigma'} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j\sigma'}$

③

$$H=-\sum_{i\sigma}\mu_i^\sigma c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma} + \sum_i \left(t_{i,i+1}^{\sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger c_{i+1\sigma'} + h.c \right)$$

$t_{i,i+1}^{\uparrow\uparrow}$, $t_{i,i+1}^{\downarrow\downarrow}$, $t_{i,i+1}^{\downarrow\uparrow}$, $t_{i,i+1}^{\uparrow\downarrow}$

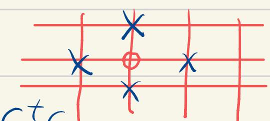
$(c_{1\uparrow}^\dagger, c_{2\uparrow}^\dagger, \dots c_{N\uparrow}^\dagger, c_{1\downarrow}^\dagger, c_{2\downarrow}^\dagger, \dots)$



技巧：分类型，一类一类的写代码.

④ 一个二维的例子.

$\langle ij\rangle$ ← 最近邻 Hopping.



$$H=-t\sum_{\langle ij\rangle} c_i^\dagger c_j - \mu\sum_i c_i^\dagger c_i$$

2d + spin $H=-\sum_{\substack{\langle ij\rangle\\ \sigma\sigma'}} t_{ij}^{\sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma'} - \sum_i \mu_{i\sigma} c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$

人为设置映射.

将2维的 C_{ij} $\rightarrow$ 重排一下变成一个向量，则系统就只写成了一个矩阵.

和有限差分方法中 2d 类似.

另一种方法是利用检索的方式来写矩阵。

$\alpha = \{i, j\}$.

indx	$X(i)$	$Y(i)$	$Z(i)$
1	$x(0)$	$y(0)$	$z(0)$
2	$x(1)$	$y(1)$	$z(1)$
3	$x(2)$	$y(2)$	$z(2)$
4	⋮	⋮	⋮

建立一个索引表.

如果系统有平移对称性，动量是好量子数.

$$H = \sum_{ij} t_{ij} C_i^\dagger C_j + h.c \rightarrow H = \sum_k H_k$$

Real space　　　　momentum space

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} C_k$$

$$\sum_i C_i^\dagger C_i \longleftrightarrow \sum_k C_k^\dagger C_k$$