

解:我们求解复数形式的运动方程

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t},$$

然后分离解的实部.结果可得强迫振动

$$x = b e^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

其中

$$b = \frac{f_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \lambda)^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \lambda)}{\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2 + 2\alpha\lambda}.$$

§ 27 参数共振

存在一种非封闭振动系统,外力的作用可以归结为其参数随时间的变化^①.

拉格朗日函数(21.3)中的 m 和 k 就是一维系统的参数,如果它们依赖于时间,则运动方程为

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}) + kx = 0. \quad (27.1)$$

用新自变量 τ 代替 t , $d\tau = dt/m(t)$, 则方程变为

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

因此,不失一般性,研究下面形式的方程就足够了

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0. \quad (27.2)$$

这个方程可以由(27.1)中令 $m = \text{const}$ 得到.

函数 $\omega(t)$ 的形式由问题的条件决定.假设这个函数是周期的,频率为 γ (周期为 $T = 2\pi/\gamma$).这就是说,

$$\omega(t + T) = \omega(t),$$

因而方程(27.2)在变换 $t \rightarrow t + T$ 下保持不变.由此可知,如果 $x(t)$ 是方程的解,则函数 $x(t + T)$ 也是解.换句话说,如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(27.2)的两个独立的解,则变量替换 $t \rightarrow t + T$ 后这两个函数可以用原函数线性表示.这种情况下可以选择 x_1 和 x_2 使得变量替换 $t \rightarrow t + T$ 导致乘以常数^②

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t).$$

具有这种性质的函数的一般形式为

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t). \quad (27.3)$$

① 一个简单的例子是单摆,其悬挂点在竖直平面内按给定周期规律运动(见习题3).

② 这种选择等价于将 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性变换矩阵对角化,需要求解相应的二次特征方程.我们假设这个方程的根不重合.

其中 $\Pi_1(t)$ 和 $\Pi_2(t)$ 是时间的周期函数(周期为 T).

这些函数中的常数 μ_1 和 μ_2 应该满足确定的关系. 事实上, 将方程

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

分别乘以 x_2 和 x_1 , 相减后可得

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0$$

或者

$$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const.} \quad (27.4)$$

然而, 对任何形如(27.6)的函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 在 t 变为 $t + T$ 时, 上面表达式左端乘以 $\mu_1 \mu_2$. 所以, 为了使等式(27.4)在任何条件下, 必须有

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (27.5)$$

从方程(27.2)的系数为实数出发, 可以进一步给出关于常数 μ_1, μ_2 的结论. 如果 $x(t)$ 是方程(27.2)的某个解, 则复共轭函数 $x^*(t)$ 也满足该方程. 由此可知, 常数 μ_1, μ_2 应该与另一对常数 μ_1^*, μ_2^* 重合, 即 $\mu_1 = \mu_2^*$ 或者 μ_1, μ_2 都是实数. 在第一种情况下, 考虑到(27.5), 有 $\mu_1 = 1/\mu_1^*$, 即 $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$. 常数 μ_1 和 μ_2 的模都等于 1.

在第二种情况下, 方程(27.2)的两个独立解的形式为

$$x_1(t) = \mu^{i/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{i/T} \Pi_2(t), \quad (27.6)$$

并且 μ 是不为 1 的正实数或者负实数. 这些函数之一(当 $|\mu| > 1$ 和 $|\mu| < 1$ 时为第一个或者第二个函数)随时间指数增长. 这就是说, 系统的静止状态(在平衡位置 $x=0$)不稳定: 偏离这个状态任意小量, 都会使出现的位移 x 随时间快速增长. 这种现象称为参数共振.

应该注意的是, 当 x 和 \dot{x} 的初值严格等于零时, 它们以后也等于零, 这不同于通常的共振(§ 22). 在通常共振情况下, 从零初始条件出发位移也会随时间增长(正比于 t).

下面我们研究一种重要的参数共振情况, 函数 $\omega(t)$ 与常数 ω_0 相差很小, 并且是周期函数

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (27.7)$$

其中常数 $h \ll 1$ (可以认为 h 是正数, 这是因为总可以通过选择时间起点来实现). 下面将会看到, 如果函数 $\omega(t)$ 接近 ω_0 的两倍, 则参数共振更强烈. 所以假设

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon,$$

其中 $\epsilon \ll \omega_0$.

求解运动方程^①

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \epsilon)t] x = 0 \quad (27.8)$$

时,我们假设解的形式为

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t, \quad (27.9)$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是随时间变化很慢(与 \cos 和 \sin 相比)的函数. 解的这个形式自然不是精确的. 事实上, 函数 $x(t)$ 也包括频率与 $\omega_0 + \epsilon/2$ 相差为 $2\omega_0 + \epsilon$ 的整数倍的项. 然而, 这些项是 h 的高阶小量, 在一阶近似中可以忽略(参见习题 1).

将(27.9)代入(27.8), 保留 ϵ 的一阶项, 这时假设 $\dot{a} \sim \epsilon a$, $\dot{b} \sim \epsilon b$ (这个假设在共振情况下的正确性由结果保证). 将三角函数的乘积展开为三角函数之和, 如

$$\cos\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t \cdot \cos(2\omega_0 + \epsilon)t = \frac{1}{2} \cos\left(3\omega_0 + \frac{3\epsilon}{2}\right)t + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t$$

等等, 我们略去频率为 $3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)$ 的项, 结果可得

$$-\left(2\dot{a} + b\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t + \left(2\dot{b} - a\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t = 0.$$

这个等式成立要求 \sin 和 \cos 的系数都等于零. 由此可得函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的两个线性微分方程. 我们来求这两个方程的正比于 e^s 的解. 于是有

$$sa + \frac{1}{2}\left(\epsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right)b = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right)a - sb = 0,$$

这两个代数方程协调条件为

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (27.10)$$

发生参数共振的条件是 s 为实数(即 $s^2 > 0$)^②. 可见, 参数共振发生在 $2\omega_0$ 附近的区间^③

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2}. \quad (27.11)$$

① 这种方程(γ 和 h 是任意的)在数学物理中称为马丢方程.

② 在(27.6)中的常数 μ 与 s 的关系是 $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$ (当 t 替换为 $t + 2\pi/2\omega_0$ 时, 在(27.9)中的 \sin 和 \cos 改变符号).

③ 如果只对共振区间的边界感兴趣(对在内部 s 的表达式不感兴趣), 则计算可以简化, 只要注意到在边界上 $s=0$, 即(27.9)中系数 a 和 b 为常数, 这时我们立即得到相应于区间(27.11)的边界 $\epsilon = \pm \omega_0/2$.

这个区间的宽度与 h 成正比, 振动增强指数 s 在该区间有同样的量级.

在系统变化频率 γ 接近 $2\omega_0/n$ (n 为任意整数) 情况下, 也会发生参数共振. 但共振区间(不稳定区间)的宽度随 n 以 h^n 的规律迅速减小(见习题 2). 振动增强指数也同样减小.

在系统存在微弱摩擦时, 也存在参数共振现象, 但不稳定区间变小. 在 § 25 中我们已经看到, 摩擦使振幅按 $e^{-\lambda t}$ 的规律减小. 所以参数共振时振动增强规律为 $e^{(s-\lambda)t}$ (正数 s 是无摩擦情况的解), 不稳定区间由等式 $s - \lambda = 0$ 确定. 于是, 利用(27.10)中的 s , 我们可得代替(27.11)的共振区间

$$-\sqrt{(h\omega_0/2)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{(h\omega_0/2)^2 - 4\lambda^2}. \quad (27.12)$$

注意到, 这时不是对于任意小的 h 都能发生共振, 而是必须大于一个确定的“阈值” h_k , 在(27.12)情况下为

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

可以证明, 对于接近频率 $2\omega_0/n$ 的共振, 阈值 h_k 正比于 $\lambda^{1/n}$, 即随着 n 增加.

习 题

习题 1 试求在 $\gamma = 2\omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界, 精确到 h^2 量级.

解: 设方程(27.8)的解形式为

$$x = a_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon/2)t + b_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon/2)t + \\ a_1 \cos 3(\omega_0 + \varepsilon/2)t + b_1 \sin 3(\omega_0 + \varepsilon/2)t,$$

这里考虑了 h 的更高阶项(与(27.9)比较). 我们只对不稳定区间的边界感兴趣, 假设系数 a_0, b_0, a_1, b_1 是常数(相应于在第 83 页的脚注里提到的), 在代入方程(27.8)时, 将三角函数之积化为三角函数之和, 略去频率为 $5(\omega_0 + \varepsilon/2)$ 的项, 这些项在更高阶近似中才需要. 于是我们有

$$\left[-a_0 \left(\omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 \right] \cos \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ \left[-b_0 \left(\omega_0 \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \\ \left[\frac{h\omega_0^2}{2} a_0 - 8\omega_0^2 a_1 \right] \cos 3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \left[\frac{h\omega_0^2}{2} b_0 - 8\omega_0^2 b_1 \right] \sin 3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t = 0.$$

在频率为 $\omega_0 + \varepsilon/2$ 的项中保留一阶和二阶小量, 在频率为 $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$ 的项中保留一阶小量. 每个方括号内的表达式都应该分别等于零. 由后面两个方括号可得

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{16} b_0,$$

然后再由前两个方括号可得

$$\omega_0 \epsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{h^2\omega_0^2}{32} = 0.$$

求解这个方程,精确到 h^2 量级,我们可得不稳定区间边界的 ϵ 值:

$$\epsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{h^2\omega_0}{32}.$$

习题 2 试求在 $\gamma = \omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界.

解:令 $\gamma = \omega_0 + \epsilon$, 可得运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \epsilon)t] x = 0.$$

注意到所求边界值 $\epsilon \sim h^2$, 我们求如下形式的解:

$x = a_0 \cos(\omega_0 + \epsilon)t + b_0 \sin(\omega_0 + \epsilon)t + a_1 \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + b_1 \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + c_1$, 在此式中同时考虑了两个一阶项. 为了求不稳定区间边界, 我们假设系数都是常数, 得

$$\begin{aligned} & \left[-2\omega_0 \epsilon a_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_1 + h\omega_0^2 c_1 \right] \cos(\omega_0 + \epsilon)t + \left[-2\omega_0 \epsilon b_0 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_1 \right] \sin(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & \left[-3\omega_0^2 a_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] \cos 2(\omega_0 + \epsilon)t + \left[-3\omega_0^2 b_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} b_0 \right] \sin 2(\omega_0 + \epsilon)t + \\ & \left[\omega_0^2 c_1 + \frac{h\omega_0^2}{2} a_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

由此可得

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0, \quad b_1 = \frac{h}{6} b_0, \quad c_1 = -\frac{h}{2} a_0,$$

于是可得不稳定边界:

$$\epsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \quad \epsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0.$$

习题 3 设平面摆的悬挂点在竖直平面内振动, 试求此平面摆微振动的参数共振条件.

解: 根据 § 5 的习题 3 求得的拉格朗日函数, 微振动 ($\varphi \ll 1$) 的运动方程为

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left[1 + 4 \frac{a}{l} \cos(2\omega_0 + \epsilon)t \right] \varphi = 0,$$

其中 $\omega_0^2 = g/l$. 由此可见, $4a/l$ 起着正文中小参数 h 的作用. 条件 (27.11) 写成如下形式:

$$|\epsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

§ 28 非简谐振动

此前的微振动理论建立在系统势能和动能分别展开到坐标和速度的二阶项

基础上,这时运动方程是线性的,在这种近似下研究线性振动.在振幅足够小的条件下这种近似是合理的,然而,考虑更高阶的近似(称为非简谐振动或者非线性振动)会发现某些运动,尽管这些运动是微弱的,但在本质上却具有新的特性.

我们将拉格朗日函数展开至3阶.这时势能中出现坐标 x_i 的3阶项,在动能中出现速度和坐标的乘积,如 $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$.与表达式(23.3)不同的是,在函数 $a_{ik}(q)$ 的展开式中保留了 x 的一阶项.于是,拉格朗日函数的形式为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l, \quad (28.1)$$

其中 n_{ikl}, l_{ikl} 是新的常系数.

如果从任意坐标 x_i 变换到简正坐标 Q_α (线性近似),则由于变换是线性的,(28.1)的第3和第4个和变为类似的和,其中坐标 x_i 和速度 \dot{x}_i 将被 Q_α 和 \dot{Q}_α 代替.我们将这些和的系数用 $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ 表示,拉格朗日函数可写成

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (28.2)$$

我们不想完整地写出这个拉格朗日函数导出的运动方程.这个方程的形式为

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28.3)$$

其中 f_α 是坐标 Q 及其对时间导数的二次齐次函数.

利用逐阶近似的方法,我们求方程的如下形式的解:

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (28.4)$$

其中 $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$, 函数 $Q_\alpha^{(1)}$ 满足“无扰”方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

即为通常的简谐振动

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (28.5)$$

在高一阶近似中,在(28.3)右端只保留到二阶小量,可得 $Q_\alpha^{(2)}$ 的方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28.6)$$

其中右端应该代入(28.5).结果我们得到线性非齐次微分方程,其右端可以变换为简单周期函数之和.例如

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}. \end{aligned}$$

于是方程(28.6)右端各项相应于频率为系统固有频率之和、之差的振动. 方程的解应该包含同样周期的因子, 因此在二阶近似中, 在频率为 ω_a 的简谐振动上附加了频率为

$$\omega_a \pm \omega_\beta \quad (28.7)$$

的振动(也包括倍频和零频, 零频相应于常数位移). 这些称为组合频率. 组合振动的振幅正比于简谐振动的振幅之积 $a_a a_\beta$ (或者 a_a^2).

在拉格朗日函数的展开式中考虑更高阶小量的近似中, 出现的组合共振的频率是更多频率的和与差, 此外还会出现一个新现象.

这就是, 在 3 阶近似的组合频率中出现与原频率 ω_a 一致的 $\omega_a + \omega_\beta - \omega_\beta$. 在应用上述方法时, 运动方程右端将有共振项, 导致方程的解中出现随时间增长的振幅. 但是, 从物理意义显然可知, 没有外部能量来源的封闭系统不可能自己增大振动强度.

事实上, 在高阶近似中基频 ω_a 与出现在势能二次表达式中“无扰”值 ω_a^0 相比发生了变化. 在解中出现随时间增长项, 是因为下面类型的展开式

$$\cos(\omega_a^{(0)} + \Delta\omega_a)t \approx \cos(\omega_a^{(0)}t) - t\Delta\omega_a \sin(\omega_a^{(0)}t)$$

在 t 足够大时, 显然不合理.

因此, 在研究下一阶近似时, 逐阶近似方法的形式需要改变, 要使出现在解中的周期因子, 从开始就包含准确的而不是近似的频率. 由运动方程的解无共振项条件可以确定频率的改变.

我们用单自由度振动介绍这种方法, 将拉格朗日函数写成

$$L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \quad (28.8)$$

相应的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28.9)$$

我们将寻求级数形式的逐阶近似解

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

并且

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (28.10)$$

中精确的 ω 将在后面以级数形式 $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$ 求解出来(适当选择初始时刻, 总可以使初始相位角等于零). 但是这时方程(28.9)不是很方便, 这是因为代入(28.10)后, 方程的右端不是严格等于零. 所以我们预先将该方程形成等价形式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \quad (28.11)$$

此处假设 $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, 略去二阶以上的小量, 可得 $x^{(2)}$ 的方程

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t \\ &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos(2\omega t) + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t.\end{aligned}$$

等式右端无共振项的条件容易给出 $\omega^{(1)} = 0$, 这与本节开始所讲的二阶近似方法一致. 此后, 求解非齐次线性方程可得

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega t). \quad (28.12)$$

进一步, 在(28.11)中假设 $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, 可得 $x^{(3)}$ 的方程

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

或者将该方程右端代入(28.10)和(28.12), 经过简单的变换得

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3 \left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos(3\omega t) + a \left[2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5\alpha^2 \alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta \right] \cos \omega t.$$

令共振因子 $\cos \omega t$ 的系数等于零, 可得对基频的修正量

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2, \quad (28.13)$$

它正比于振幅的平方. 于是, 3阶组合振动为

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos(3\omega t). \quad (28.14)$$

§ 29 非线性振动中的共振

在强迫振动中计入非简谐项, 在共振现象中会出现本质的新特性.

在方程(28.9)右端加入周期(频率为 γ)外力, 得

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3, \quad (29.1)$$

其中考虑了阻尼系数为 λ (下面假设为小量) 的摩擦力. 严格地讲, 在自由振动方程中考虑非线性项的同时, 也应该考虑强迫力幅值中的高阶项, 这些高阶项对应于强迫力对位移 x 可能的依赖关系. 我们不计入这些项仅仅是为了简化公式, 它们不改变现象的本质.

设

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(ε 是小量), 即接近于通常的共振. 利用下面的方法, 我们不研究方程(29.1)就可以探讨所产生运动的特性.

在线性近似中, 在共振附近, 强迫振动的振幅 b 对外力幅值 f 和频率 γ 的依

赖关系由(26.7)给出,该公式可以写成

$$b^2(\epsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (29.2)$$

振动的非线性导致固有频率对振幅的依赖,将固有频率写成

$$\omega_0 + \chi b^2, \quad (29.3)$$

其中常数 χ 可以用非简谐系数表示(参见(28.13)).相应地,在公式(29.2)中(确切地说是在很小的差 $\gamma - \omega_0$ 中)用 $\omega_0 + \chi b^2$ 代替 ω_0 .

仍采用记号 $\epsilon = \gamma - \omega_0$,结果可得方程

$$b^2[(\epsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29.4)$$

或者

$$\epsilon = \chi b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

方程(29.4)是 b^2 的三次方程,它的实根确定强迫振动的振幅.在给定外力幅值 f 时,我们研究这个振幅对外力频率的依赖关系.

当 f 足够小时,振幅 b 也很小,可以在(29.4)中忽略 b 的二阶以上项,我们就得到函数关系 $b(\epsilon)$ (参见(29.2)),用极大值点为 $\epsilon = 0$ 的对称曲线表示(图 32a).随着 f 的增大,曲线发生变形,开始还保持其特性,即有一个极大值(图 32b),但极大值移动到正 ϵ 一边(当 $\chi > 0$ 时).这时方程(29.4)的 3 个根中只有一个是实数.

然而,从某个特定值 $f = f_k$ (我们下面再确定)开始,曲线的性质发生改变.对于每个 $f > f_k$ 都存在方程(29.4)有 3 个实根的区域,相应于图 32c 中的 BCDE.

在 D 点和 C 点的条件 $db/d\epsilon = \infty$ 确定这个区域的边界.将方程(29.4)对 ϵ 求导得

$$\frac{db}{d\epsilon} = \frac{-\epsilon b + \chi b^3}{\epsilon^2 + \lambda^2 - 4\chi\epsilon b^2 + 3\chi^2 b^4}.$$

所以确定 D 点和 C 点位置的方程为(29.4)和

$$\epsilon^2 - 4\chi\epsilon b^2 + 3\chi^2 b^4 + \lambda^2 = 0. \quad (29.5)$$

ϵ 的两个值都是正的.在 $db/d\epsilon = 0$ 的点,振幅达到最大值.这时 $\epsilon = \chi b^2$,由(29.4)得

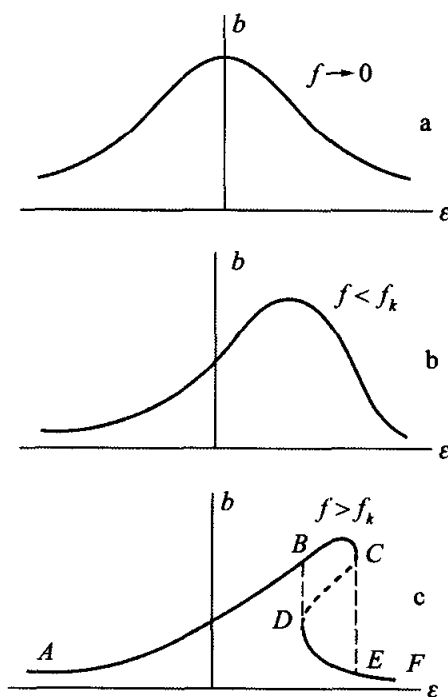


图 32

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda} \quad (29.6)$$

这个值与(29.2)给出的最大值相同.

可以证明(我们不在这里给出)^①,方程(29.4)的3个实根中的中间根(即图32c上虚线段CD),相应于不稳定振动:任意小的微弱作用都会使系统转到相应于较大根或者较小根的振动(即BC或者DE段).

因此,只有ABC和DEF两个分支对应着系统的实际振动.这时存在允许两个不同振幅的频率区域是非常重要的特性.所以,在外力频率逐渐增大时,强迫振动的振幅沿着曲线ABC增大.在C点振幅发生间断,跃落到E点,然后(在继续增大频率情况下)沿着曲线EF变化.如果现在减小频率,强迫振动振幅将沿着FD变化,在D点突跳到B点,然后沿着BA减小.

为了计算 f_k ,我们注意到,这是(b^2 的)二次方程(29.5)有重根时对应的 f .当 $f=f_k$ 时整个曲线段CD变为一个拐点.令二次方程(29.5)的判别式等于零,得 $\epsilon^2=3\lambda^2$,相应的根为 $\chi b^2=2\epsilon/3$.代入方程(29.4)可得

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\chi|}. \quad (29.7)$$

当 $\gamma \approx \omega_0$ 时,振动的非线性除了使共振性质改变,还导致出现新型的共振,即频率远离 ω_0 的外力可以激起频率接近 ω_0 的振动.

设外力频率为 $\gamma \approx \omega_0/2$,即

$$\gamma = \omega_0/2 + \epsilon.$$

在一阶线性近似中,外力激起同频率的振动,振幅与外力幅值成正比,即

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \epsilon\right)t$$

(根据公式(22.4)).考虑非线性后,在二阶近似中,在方程(29.1)右端出现频率为 $2\gamma = \omega_0$ 的项.就是说,将 $x^{(1)}$ 代入方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

引用倍角的余弦并在方程右端仅保留共振项,得

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\epsilon)t. \quad (29.8)$$

这个方程与(29.1)的不同之处仅在于,表达式中力的幅值 f 换成了 f^2 .这就是说,这种共振与前述 $\gamma \approx \omega_0$ 共振性质相同,但强度较小.在方程(29.4)中用 $-8\alpha f^2/(9m^2\omega_0^4)$ 代替 f (以及用 2ϵ 代替 ϵ),可得函数关系 $b(\epsilon)$:

^① 证明可以在下面书中找到:Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1958.

$$b^2 [(2\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81 m^4 \omega_0^{10}} \quad (29.9)$$

下面设外力频率为

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

在一阶近似中有

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

将 $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ 代入方程(29.1), 我们得不到像前一种情况下的具有共振外力性质的项. 但由于正比于 $x^{(1)} x^{(2)}$ 的 3 阶项而产生参数共振. 如果在所有非线性项中仅保留这一项, 则得 $x^{(2)}$ 的方程:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)}$$

或者

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29.10)$$

这是(27.8)类型的方程(考虑摩擦), 在一定的频率区间内振动不稳定.

但是, 为了确定合成振幅, 这个方程还不够. 最终振幅的确定与非线性效应相关, 为此在运动方程中应该保留 $x^{(2)}$ 的非线性项:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos[(2\omega_0 + \varepsilon)t] x^{(2)} \quad (29.11)$$

注意到下面的情况, 研究这个问题可以大大简化. 在方程(29.11)右端, 令

$$x^{(2)} = b \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \delta \right]$$

(其中 b 是待求的共振振幅, 常数 δ 是相位平移, 它对后面研究不重要), 同时将两个周期因子之积写成两个余弦之和, 可得

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \delta \right].$$

这是具有通常共振性质的项(对于固有频率 ω_0). 所以问题又转化为本节开始段落研究的通常的非线性系统共振, 区别仅在于 $\alpha f b / (3m\omega_0^2)$ 起到外力幅值的作用(用 $\varepsilon/2$ 替换了 ε). 在方程(29.4)中做这样的替换, 得

$$b^2 \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} - \chi b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36 m^2 \omega_0^6}.$$

求解该方程得可能的振幅值:

$$b = 0, \quad (29.12)$$

$$b^2 = \frac{1}{\chi} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right] \quad (29.13)$$

$$b^2 = \frac{1}{\chi} \left[\frac{\epsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6 m \omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right] \quad (29.14)$$

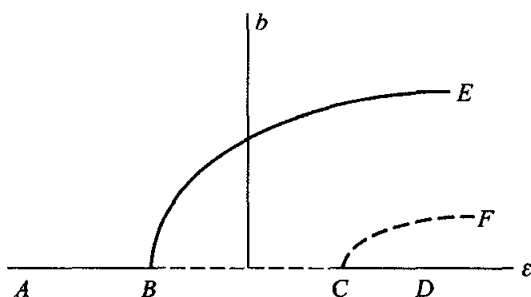


图 33

图 33 画出了所得的 b 对 ϵ 的依赖关系(对于 $\chi > 0$, 当 $\chi < 0$ 时曲线方向相反). B 点和 C 点相应于

$$\epsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3 m \omega_0^3} \right)^2 - 4\lambda^2}.$$

在 B 点左边只可能有 $b = 0$, 即没有共振, 也不可能激发频率为 ω_0 的振动. 在 B 和 C 之间有两个根: $b = 0$ (图 33 上线段 BC) 和表达式 (29.13) (分支 BE). C 点右边存在 3 个根 (29.12) — (29.14). 但是, 不是所有这些值都对应稳定振动. 在 BC 段^① 上 $b = 0$ 不稳定, 并且可以证明, 相应于根 (29.14) (位于另外两个根之间) 的振动总是不稳定的. 在图 33 上不稳定的 b 值用虚线表示.

我们研究外力频率逐渐减小的情况下, 初始“静止”^② 系统的行为. 在到达 C 点之前 $b = 0$, 然后跳跃到分支 EB 上. 继续减小 ϵ , 振幅在 B 点减小到零. 反之, 增大频率使振幅沿着 BE 增大^③.

我们所研究的共振是产生在非线形振动系统中的主要情况. 在更高阶近似中会出现其它频率的共振. 严格地讲, 共振应该发生在满足关系式 $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (m, n 是整数) 的任意频率 γ 上, 也就是说, 在任意的 $\gamma = p\omega_0/q$ (p, q 是整数)

① 这一段恰好相应于参数共振区间 (27.12), 比较 (29.10) 和 (27.8) 有 $|h| = 2\alpha f / (3m\omega_0^3)$. 所研究现象可能存在的条件

$$\left| \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3} \right| > 4\lambda$$

相应于不等式 $h > h_k$.

② 注意, 我们这里研究的只是共振, 没有共振并不意味着系统静止, 系统存在频率为 γ 的微弱强迫振动.

③ 注意, 所有给出的公式只有在振幅 b (以及 ϵ) 足够小情况下成立. 事实上, 曲线 BE 和 CF 以后相交于一点, 达到这点时振动停止而且 $b = 0$.

情况下,都应该发生共振.但是,随着近似阶数的增加,共振现象的强度(以及发生共振的频率区间)迅速减小,实际上可以观察到的共振只能是 $\gamma \approx p\omega_0/q$ 并且 p, q 的值都不大的情况.

习 题

习题 试求在频率 $\gamma \approx 3\omega_0$ 上共振的函数关系 $b(\epsilon)$.

解: 在一阶近似中

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2} \cos[(3\omega_0 + \epsilon)t].$$

对二阶近似 $x^{(2)}$, 由(29.1)可得方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda \dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2},$$

其中等式右端只写出了导致所研究共振的项. 在该方程中假设

$$x^{(2)} = b \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{3}\right)t + \delta\right]$$

并从 3 个余弦的乘积中分出共振项, 可得方程右端表达式为

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2} \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{3}\right)t - 2\delta\right]$$

由此可见, b 对 ϵ 的依赖关系, 可以在方程(29.4)中用 $3\beta b^2 f/(32m\omega_0^2)$ 代替 f , 用 $\epsilon/3$ 代替 ϵ 求得:

$$b^2 \left[\left(\frac{\epsilon}{3} - \chi b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12} m^2 \omega_0^6} b^4 \equiv A b^4.$$

这个方程的根为

$$b = 0, \quad b^2 = \frac{\epsilon}{3\chi} + \frac{A}{2\chi^2} \pm \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\epsilon A}{3\chi} + \frac{A^2}{4\chi^2} - \lambda^2}.$$

在图 34 上画出了 b 对 ϵ 的依赖关系的特征曲线 ($\chi > 0$). $b = 0$ (横轴) 和分支 AB 对应于稳定振动. A 点相应的值为

$$\epsilon_k = \frac{3(4\chi^2 \lambda^2 - A^2)}{4\chi A}, \quad b_k^2 = \frac{4\chi^2 \lambda^2 + A^2}{4\chi^2 A}.$$

只有在 $\epsilon > \epsilon_k$ 和 $b > b_k$ 情况下存在振动. 由于状态 $b = 0$ 总是稳定的, 因此为了激起振动, 初始的“推动”是必须的.

所得的公式只有在 ϵ 足够小时才成立. 如果力的幅值满足条件 $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\chi \ll \omega_0$, 则 λ 是小量可以保证 ϵ 为小量.

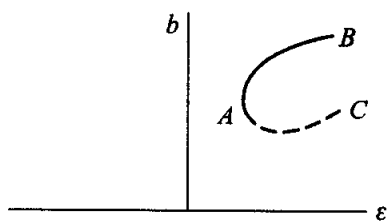


图 34