$T(M)$和 $T^*(M)$都是 $2n$ 维流形，局域都是直积流形（即 n 维的坐标空间与 n 维的向量空间的直积）。

由于 dx^j 就是余切向量的基，所以 P 点的余切向量应写成

$$\sigma(P)=\sigma_j(P)dx^j$$

把 P 点推广到 M 上每一个点 $x(x^1,\cdots,x^n)$，则形成**余切向量场**

$$\sigma(x)=\sigma_j(x)dx^j \tag{1.3.11}$$

进一步再设 $\sigma_j(x)$是可微的，则(1.3.11)式的 $\sigma(x)$称为可微余切场。可微余切场 $\sigma(x)$又称为 1-形式（因为式中含有一个 dx^j）。若取 $\sigma_j(x)=\delta_{ij}$，则 $\sigma(x)=dx^i$，所以 dx^i 本身就是一个 1-形式。

§ 1.4 微分形式与外微分

定义 1.4.1 1-形式 dx^i 与 1-形式 dx^j 的 Cartan 外乘 $dx^i\wedge dx^j$ 是：

$$\begin{aligned} dx^i\wedge dx^j &=(dx^i\otimes dx^j-dx^j\otimes dx^i)\\ &=\delta^{ij}_{kq}dx^k\otimes dx^q \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$$(\delta^{ij}_{kq}=\delta^i_k\delta^j_q-\delta^i_q\delta^j_k)$$

$dx^i\wedge dx^j$ 是一个 2-形式（有两个 1-形式相乘），是一组有两个指标 i,j 的张量的基。

在流形 M 上可以建立张量场

$$K_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}f_{ij}(x)dx^i\wedge dx^j \tag{1.4.2}$$

如果 $f_{ij}(x)$为可微的，$K_2(x)$就是可微的张量场，同时也是一个 2-形式。还可以扩充到更高的 p-形式：

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}=\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}dx^{k_1}\otimes dx^{k_2}\otimes\cdots\otimes dx^{k_p} \tag*{(1.4.3)$_1$}$$

其中：

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{k_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{i_p}_{k_1} & \cdots & \delta^{i_p}_{k_p}\end{vmatrix}\quad (i,k=1,\cdots,n)$$

$$=\begin{cases}1 & \text{当下指标为上指标的偶置换}\\ -1 & \text{当下指标为上指标的奇置换}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}\tag{1.4.3$_2$}$$

从而可建立有 p 个指标的外微分张量的基和 p-形式的张量场：

$$K_p(x)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\tag{1.4.4}$$

若有

$$\begin{aligned}&p\text{-形式}:\alpha_p(x)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\ &q\text{-形式}:\beta_q(x)=\frac{1}{q!}g_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\end{aligned}\tag{1.4.5}$$

则可给出外积（$(p+q)$-形式）：

$$\begin{aligned}\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)&=\frac{1}{p!\ q!}f_{i_1\cdots i_p}g_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\\ &\quad\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\\ &=\frac{(p+q)!}{p!\ q!}r_{p+q}(x)\end{aligned}\tag{1.4.6$_1$}$$

其中

$$\begin{aligned}r_{p+q}(x)=\frac{1}{(p+q)!}f_{i_1\cdots i_p}g_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\ \wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_q}\end{aligned}\tag{1.4.6$_2$}$$

注意　(1.4.6)$_2$ 式中的 $r_{p+q}(x)$和(1.4.5)式中的 $\alpha_p(x)$，$\beta_q(x)$有相同的外形，函数 $f_{i_1\cdots i_p}(x)$和 $g_{j_1\cdots j_q}(x)$相对其下指标完全反对称。如果 M 是 n 维的，则要求 $p+q\leqslant n$，否则 $\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)=0$，因为(1.4.6)$_2$ 式中的指标 $i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q$ 必有重复。

外积满足结合律和分配律：

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) \tag{1.4.7}$$

$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma \tag{1.4.8}$$

p-形式$\alpha_p(x)$和q-形式$\beta_q(x)$还有如下的交换律：

$$\alpha_p(x)\wedge\beta_q(x)=(-1)^{pq}\beta_q(x)\wedge\alpha_p(x) \tag{1.4.9}$$

这可以从$(1.4.3)_1$式和$\delta^{i_1\cdots i_p}_{k_1\cdots k_p}$的性质$(1.4.3)_2$式得到。至此，我们已知：

(1) 切向量场$X,Y,Z,\cdots$的李括号有如下性质：

① $[\lambda_1X+\lambda_2Y,Z]=\lambda_1[X,Z]+\lambda_2[Y,Z]$ (1.4.10)

② $[X,Y]=-[Y,X]$ (1.4.11)

③ $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (1.4.12)

这说明切向量场$X,Y,Z,\cdots$的集合构成李代数。

(2) 余切向量$(\mathrm{d}x^1),(\mathrm{d}x^2),(\mathrm{d}x^3),\cdots,(\mathrm{d}x^n)$也有一个重要性质，以下举例说明。

我们把$\mathrm{d}x^i=(\mathrm{d}x^i)$看作矢量，在$n$维流形上有$n$个分量，例如取二维流形正交坐标：

$$\mathrm{d}x^1=\begin{cases}(\mathrm{d}x^1)^1=\mathrm{d}x^1\\(\mathrm{d}x^1)^2=0\end{cases}\qquad \mathrm{d}x^2=\begin{cases}(\mathrm{d}x^2)^1=0\\(\mathrm{d}x^2)^2=\mathrm{d}x^2\end{cases}$$

则有

$$\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2=\delta^{12}_{ij}(\mathrm{d}x^1)^i(\mathrm{d}x^2)^j=\mathrm{d}x^1\cdot\mathrm{d}x^2$$

取三维流形正交坐标：

$$\mathrm{d}x^1=\begin{cases}(\mathrm{d}x^1)^1=\mathrm{d}x^1\\(\mathrm{d}x^1)^2=(\mathrm{d}x^1)^3=0\end{cases}$$

$$\mathrm{d}x^2=\begin{cases}(\mathrm{d}x^2)^2=\mathrm{d}x^2\\(\mathrm{d}x^2)^3=(\mathrm{d}x^2)^1=0\end{cases}$$

$$\mathrm{d}x^3=\begin{cases}(\mathrm{d}x^3)^3=\mathrm{d}x^3\\(\mathrm{d}x^3)^1=(\mathrm{d}x^3)^2=0\end{cases}$$

则有

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = \delta_{ijk}^{123}(\mathrm{d}x^1)^i(\mathrm{d}x^2)^j(\mathrm{d}x^3)^k = \mathrm{d}x^1 \cdot \mathrm{d}x^2 \cdot \mathrm{d}x^3$$

依此类推到 n 维正交坐标系，可得

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \mathrm{d}x^1 \cdot \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n = \text{体积元} \tag{1.4.13}$$

如果坐标扭转一下，例如取 $\mathrm{d}x^{1'} = \mathrm{d}x^1 + 2\mathrm{d}x^2$，则也有

$$\mathrm{d}x^{1'} \wedge \mathrm{d}x^{2'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \text{体积元}$$

所以无论坐标轴怎样非正交化，

$$\mathrm{d}x^{1'} \wedge \mathrm{d}x^{2'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n'} = \text{体积元} \tag{1.4.14}$$

总是成立的。

对于微分形式的微分运算包括：

d——外微分运算

D——协变微分运算（见第 3 章）

L_X——李导数运算（见第 2 章）

等。这里先给出外微分 d 的定义。

设有 p-形式：

$$\alpha_p = \frac{1}{p!} \quad f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \tag{1.4.15}$$

它的外微分是：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha_p &= \frac{1}{p!}\mathrm{d}f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= \frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p,j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\
&= \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+1)!}\delta_{k_1\cdots k_{p+1}}^{j\,i_1\cdots i_p} f_{i_1\cdots i_p,j}\mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_{p+1}}
\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

取分母中的 $(p+1)!$ 是因为 $k_1\cdots k_{p+1}$ 的排列有 $(p+1)!$ 种，其贡献都相同。

再进一步作外微分：

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f_{,i}\mathrm{d}x^i) = f_{,ij}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0$$

（因 $f_{,ij}=f_{,ji}$）

$$d(d\alpha_p)=\frac{1}{p!}f_{i_1\cdots i_p,jk}dx^k\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}=0 \qquad (1.4.17)$$

（因 $f_{i_1\cdots i_p,jk}$ 中 jk 对称，$dx^k\wedge dx^j$ 反对称）

§1.5　流形的定向和微分形式的积分

在可微流形 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}$中，任意一个开集 $\bar{U}_\alpha$ 都可以有多种坐标系。其中任取两种坐标系(x^i)和(y^j)，则可能有两种情况：

(1) 雅可比行列式$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$，则称坐标系$(x^i)$和$(y^j)$的定向(orientation)相同。

(2) 雅可比行列式$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}<0$，则称坐标系$(x^i)$和$(y^j)$定向相反。

微分流形 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}$之中任意两个有交的开集 U_α 和 U_β 的坐标系(x^α)和(x^β)，在 $U_\alpha\cap U_\beta(\neq\varnothing)$区域中的$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$是不为零的，于是也可能有两种情况：

(1)$\{U_\alpha\}$之中任何一对 U_α 和 U_β 在 $U_\alpha\cap U_\beta(\neq\varnothing)$的坐标系$(x^\alpha)$和$(y^\beta)$的雅可比行列式$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0$。在这种情况下，微分流形就是定向流形。

(2)$\{U_\alpha\}$之中并不是每一对 U_α 和 $U_\beta(U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing)$的坐标系$(x^\alpha)$和$(y^\beta)$的雅可比行列式$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$都$>0$。在这种情况下，微分流形就是非定向的。

以二维曲面为例，在环面 T^2（见图 1.5.1）上，坐标架环绕一周