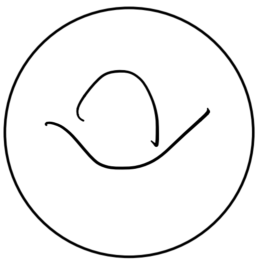
比较 $\oint\langle\psi|d|\psi\rangle$, $\oint\langle\psi|\frac{\partial}{\partial\vec{R}}|\psi\rangle d\vec{R}$

$= \oint\langle\psi|\frac{\partial}{\partial\vec{x}}|\psi\rangle\cdot d\vec{x}$

群与同伦群

manifold $\vec{x}$ $f(\vec{x})$



$f: \vec{x} \to \mathbb{R}$

切空间: $\frac{\partial}{\partial x^i} \to$ Lie 代数.

余切空间: $dx^i \Rightarrow$ 微积分

余切空间 $\Rightarrow$ { 1元积分. 线 $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$ 1-form $\in \Omega^1$
2元积分. 面 $\oint\vec{B}\cdot d\vec{S} \Rightarrow$ 2-form $\in \Omega^2$
3元积分 体 $\oint\int dxdydz \Rightarrow$ 3-form $\in \Omega^3$

长正合序列   N维流形

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \to \cdots \to \Omega^N(M) \to 0.$$

d 是一个 Linear-Operator

微积分. $\Leftrightarrow$ stokes定理 $\underbrace{d \text{ 和 } \partial}$

$\oint_D d\omega = \oint_D d(\omega + d\eta)$, $d^2 = 0$

d的便利性. $\langle n|d|n\rangle$ 而不是 $\langle n|\vec{\nabla}_R|n\rangle\cdot d\vec{R}$

具体计算.

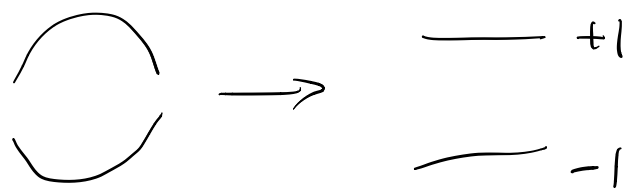
1) $\frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{Tr}(u^{-1}du)$ ⇐ 推广 $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z}$

2) $\oint \mathrm{Tr}(u^{-1}du\wedge u^{-1}du)$ ⇐ 推广 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q^{+}-Q^{-}$

理论 对 $f: X\to Y$ 进行分类 同伦群(Homotopy group)

$\pi(X, Y) = \mathbb{Z}_2$

topo Insulator
topo SC
→ Lie 代数.



$$H = u^{+}\Lambda u \to \check{H} = u^{+}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}u$$

$\check{H}^{+}\check{H} = 1$. ⇒ Lie Group.

群论 { 表示论 $g_i \to T(g_i)$
同态同构 基本定理

群定义: $(G, *)$

$G=\{g_i\}$. g_i是群元

1) 恒等元 e

例子

加法群 $(R, +)$

$a+b=b+a$

$a+(-a)=0$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

存在 0

2> 逆元 $g_i \to g_i^{\prime} g_i = e$

3> 在乘法作用下封闭. $g_i \in G,\ g_j \in G \Rightarrow g_i g_j \in G$.

4>. 结合律. $(g_i * g_j) * g_k = g_i * (g_j * g_k)$

例子.

① $(R, +)$.

② $(Z, +)$

③. $n \times n$ 的 U 矩阵 $U(N)$ 群.

a. e, $I_{n \times n}$

b. $UU^{-1} = I_{n \times n}$

c. 封闭.

d, $(UV)G = U(VG)$

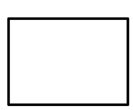
④ $(Q, \times)$ $Q(i) = \{a + bi \mid a, b \in R\}$

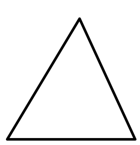
$Q(\sqrt{2}) = \{a + \sqrt{2} b \mid a, b \in Q\}$.

$(a_1 + \sqrt{2} b_1)(a_2 + \sqrt{2} b_2)$

$= (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2) + \sqrt{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

历史上证明五次方程无解析解

⑤  对称操作群. C_{4v}

⑥  C_{3v}

群的基本性质.

① $Z_2 = \{1, -1\}$ or $\{1, \sigma_x\}$

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

	1	σ_x
1	1	σ_x
σ_x	σ_x	1

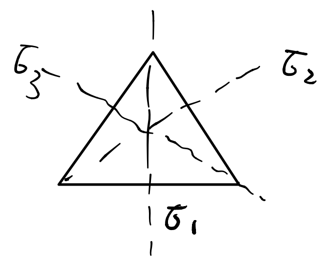
③ $C_4 = \{1, -1, i, -i\}$

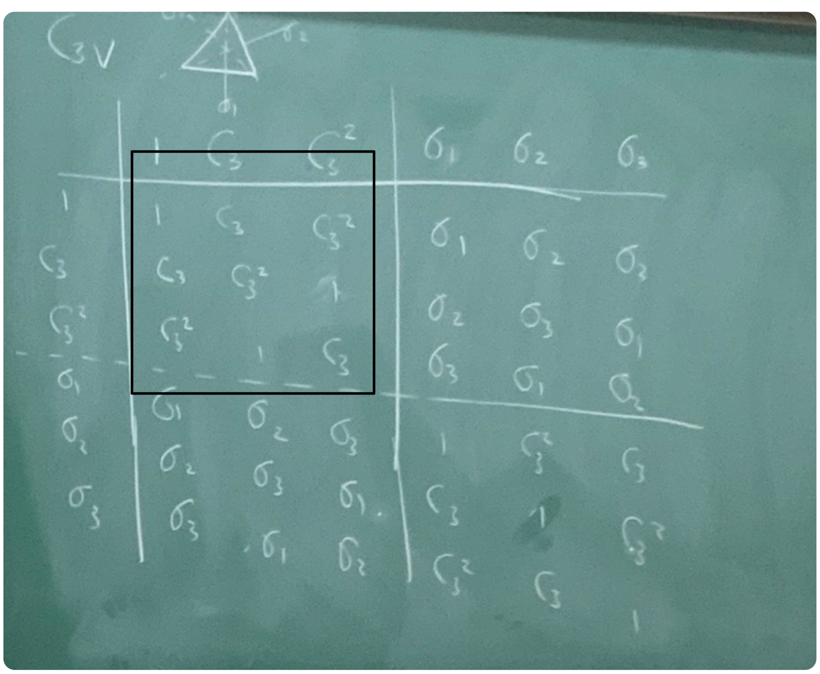
	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

每一行、每一列都无相同元素

②. 重排定理

C_{3v}.





C_{3v}	1	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	1	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	1	C_3	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	C_3^2	C_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3	1	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3^2	C_3	1

b). 子群

Subgroup.

C) 陪集

$H \subset G$

群 → 表示

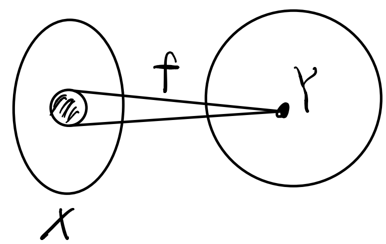
↓

子群

↓

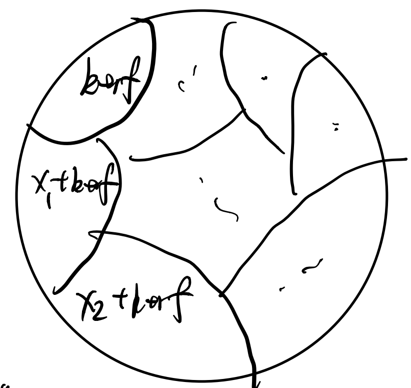
陪集 (coset)

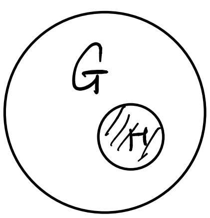
线性代数.



$[x] = \{x + x' \mid x' \in \ker f\}$

因为 $f(x') = 0$





$H \to \ker(f)$

G 按H分类

$G = \sum(a_i H)$

小空间 + 等价类

Lagrange 定理

$\frac{|G|}{|H|} = N$, $\underline{\underline{N \in \mathbb{Z}}}$

左陪集 left coset aH

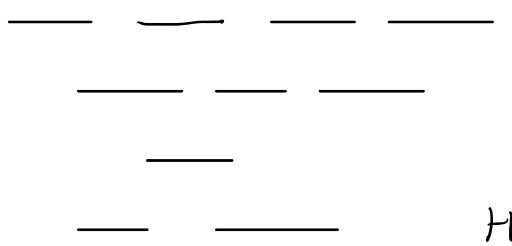
右陪集 right coset Ha

如果左陪集 = 右陪集，则H被称为正规子群.

商群 $G/H \equiv M$

表示 → 简并度

$GH = HG$. G 对称操作

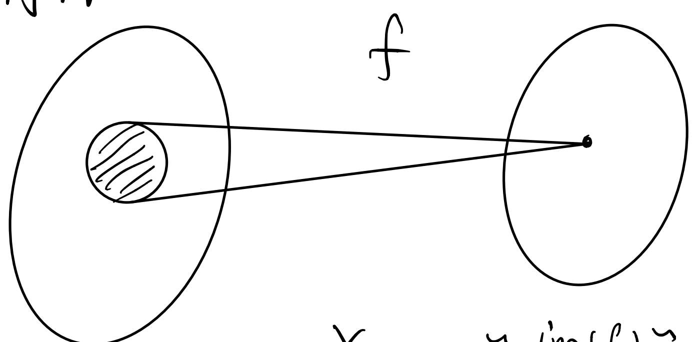


$g_i \psi_{nq} = \sum_k C_{nk}^{iq} \psi_{nk}$.

$H\psi_{nq} = \varepsilon_n \psi_{nq}$, $1 \le q \le l_n$

不可约表示 → 简并度

群同态/群同构



X.

$X/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) \cong Y$.

$\dim(\ker(f)) + \dim(Y) = \dim(X)$

$\ker(f) \hookrightarrow X \xrightarrow{\text{投影/同态}} Y \cong \mathrm{im}(f)$

群表示 同态的过程. 保运算,不保结构

$g_i \to T(g_i)$

$T(g_i)\,T(g_j) \equiv T(g_i g_j) = T(g_k)$

eg, $T(g_i) = 1$.

$H \hookrightarrow G \to G/H$

总结:

Linear algebra: $f: X \to Y$

$X/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f) \trianglelefteq Y.$

$f: G \to G'$ 为群同态.

$G/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f) \trianglelefteq G'$

同伦群及其在物理中的应用.

Ref: 1) (Ueda 书 chap 12)

2) Nakahara 书, chap 4. (1980s)

3). Soft matter Physics (2001) chap 12

目的: 区分 $X \to Y$ 不等价的 mapping 个数.

eg $f: S^1 \to S^1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} = 1, \quad \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz^n}{z^n} = n.$$

$f: S^1 \to S^1$ 不等价个数 $n \in \mathbb{Z}$

方法: $G/H \simeq \pi(X, Y) \xrightarrow{\text{textbook}} \pi_n(Y): S^n \to Y$

同伦群: 群元 = mapping $f(x) = y_0 \in Y$ 等价关系

群的四元素 1) e : const map $f: X \to Y$

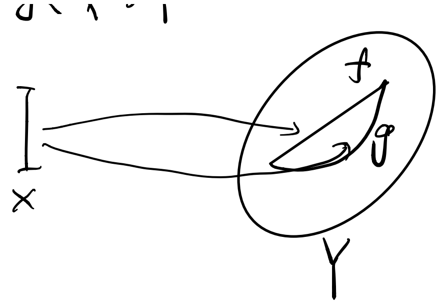
2) 逆 : $\varphi^{-1}(s) = \varphi(1-s)$ $g: X \to Y$

3) 封闭

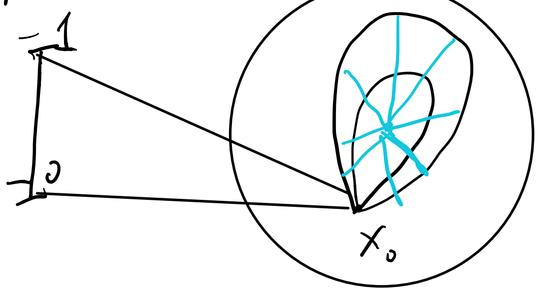
3) $\varphi_1\cdot\varphi_2(s)$

$$= \begin{cases} \varphi_1(2s) & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ \varphi_2(2s-1) & \frac{1}{2}< s\le 1 \end{cases}$$

4). 结合律:



path.



$$\begin{cases} F(x,t) \\ F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases}$$

有光滑映射 $F(x,t)$, 使上式成立.

同伦关系

$l \to l'$

$\exists\ F(x,t)$ 光滑过程

$$\begin{cases} F(x,0) = l(x) \\ F(x,1) = l'(x) \end{cases}$$

x_0 = base point.

Topological insulator

$X \to S^n$

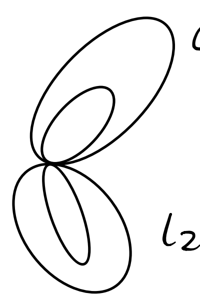
$Y \to$ Lie Algerbra

定义: $[l] = \{l' - l \mid \text{all } l'\}$

$$l_1\cdot l_2 = \begin{cases} l_1(s) \\ l_2(2s-1) \end{cases}$$

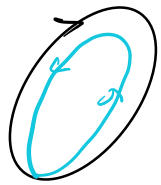
$[l_1\cdot l_2] = [l_1]\cdot[l_2]$

$$l_1\cdot l_2\cdot l_3 = \begin{cases} l_1(3s) & 0\le s\le \frac{1}{3} \\ l_2(3s-1) & \frac{1}{3}\le s\le \frac{2}{3} \\ l_3(3s-2) & \frac{2}{3}\le s\le 1 \end{cases}$$



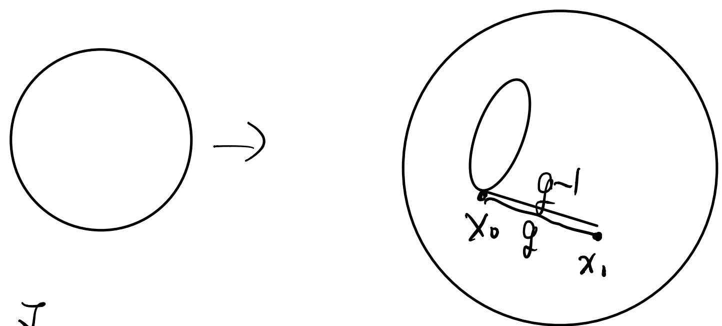
$((l_1 \cdot l_2) \cdot l_3 = l_1 \cdot (l_2 \cdot l_3)$ 结合律.

逆元 $[l \cdot l^{-1}] = [c]$



x_0, x_1 是基点,

$S^1 \to Y \qquad \pi_1(Y, x_0) \qquad \pi_1(Y, x_1) \qquad g \cdot l \cdot g^{-1}$



1> $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

2) $\pi_1(S^2) = 0$

3) $\pi_n(X \otimes Y) = \pi_n(X) \otimes \pi_n(Y)$

下一节课 Topo defect 应用. $\pi_n(G/H)$