

$$M_0 = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0, \text{ 且 } x \geq 0\}$$

为二维流形. 下节我们将进一步分析流形的微分结构, 说明半锥不是光滑流形(不是可微流形), 因其原点处非光滑.

§ 1.2 微分流形 流形的微分结构

为了对流形上函数及流形上张量场进行微分运算, 常可对流形引进坐标系, 可利用流形 M 上的开集对 $\mathbb{R}^n$ 的开集的同胚映射来对流形 M 引入局部坐标系. 由流形的定义知流形局域像 $\mathbb{R}^n$, 流形中任一点都有含该点的开集 U 与 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集 V 同胚, 令 φ 为相应的同胚映射

$$\varphi: U \rightarrow V = \varphi(U)$$

流形 M 上点 $p \in U$, 其像 $\varphi(p)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就叫做 p 点的坐标, 这样利用对 $\mathbb{R}^n$ 上开集 V 的同胚映射 φ , 可对流形 M 上开集 U 内各点建立坐标系. (U, φ) 称为流形 M 上的局部坐标系, 或简称坐标卡(chart).

流形的局域可用坐标刻画, 同时又可随时变换坐标, 我们在下面讨论中, 一方面要利用坐标系这个工具, 同时又要不受坐标系的束缚, 虽然有时明显地写出坐标表达式, 但是更通常的是写出在坐标变换下不变的形式. 流形的某一局部坐标系本身没有几何意义, 而我们主要研究与坐标变换无关的一些不变量.

过去对空间建立坐标系时, 常利用空间的度量性质. 而我们在建立局部坐标系时, 利用了同胚映射, 可完全不受度量的约束, 可研究流形在同胚变换下的不变性质. 爱因斯坦从发表狭义相对论(1908年)到发表广义相对论(1915年)花了七年时间, 他说: “为什么建立广义相对论又用了七年时间呢? 主要原因是, 要摆脱坐标必须有直接度量意义这个旧概念是不容易的.” 本书从开始就采用不受度规限制的, 可任意进行坐标变换的坐标系, 何时引入度量, 使流形成为黎曼流形, 我们要特别声明. 在本书前三章分析没有定义度规的微分流形的性质.

n 维流形一方面局域像 $\mathbb{R}^n$, 另一方面, 一般不能将整个流形 M 与 $\mathbb{R}^n$ 的开集同胚. 例如, 二维球面 S^2 最少需用两个开集覆盖. 若整个流形 M 需用若干个开集 $\{U_\alpha\}$ 所覆盖,

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$$

开集族 $\{U_{\alpha}\}$ 称为流形的开覆盖. 而所有坐标卡的集合

$$\mathcal{A} = \{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$$

称为流形 M 的坐标卡集(atlas). 若开集 $\{U_{\alpha}\}$ 中两个开集 U_{α} 与 U_{β} 间有交, $U_{\alpha} \cap$

$U_\beta \neq \emptyset$, 如图 1.4 所示, 则相应两个坐标卡集 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (U_β, φ_β) 间还应满足相容条件. φ_α 与 φ_β 将交叠区 $U_\alpha \cap U_\beta$ 同胚映射到 $\mathbb{R}^n$ 的两个非空开集, 这两个开集间映射相当于流形上坐标变换:

$$f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$x^i \mapsto y^i = f^i(x)$$

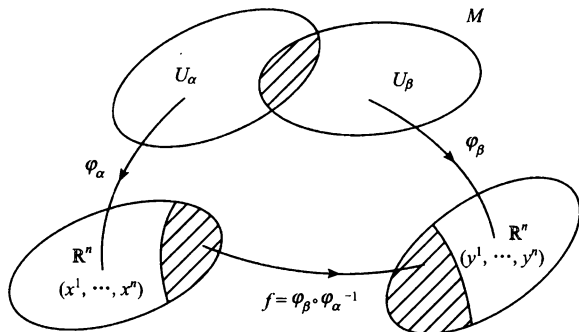


图 1.4 流形 M 的两个有交叠的坐标卡

$f^i(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 空间开集上的 n 个实连续函数. 为了能在流形上建立分析运算, 要求上述坐标变换是可微的. 如要求上述 n 个实函数具有 k 阶连续偏导数, 即映射 f 属于 C^k 类, 则称这两坐标卡为 C^k 相容.

下面我们介绍流形的微分结构 (differentiable structure) 这一重要概念. 流形的微分结构表明流形开覆盖中各开集是如何粘接在一起的, 表明了流形整体的平滑程度, 可如下定义:

定义 1.9 当流形 M 上坐标卡集 $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, 还满足下面三条件, 则称其为流形 M 的 C^k 微分结构 (或称为完备的 C^k 相容坐标卡集):

- 1) $\{U_\alpha\}$ 为流形 M 的开覆盖;
- 2) $\mathcal{A}$ 中任意两个坐标卡都是 C^k 相容;
- 3) $\mathcal{A}$ 为具备上两特性的最大坐标卡集, 如坐标卡 (U, φ) 与 $\mathcal{A}$ 中所有卡 C^k 相容, 则 $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ 中仅满足前两条件的集合, 称为 C^k 微分结构的一个基, 或称为 C^k 坐标卡集.

流形 M 有两个坐标卡集 $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 与 $\mathcal{A}' = \{U_\beta, \varphi_\beta\}$, 如其并集 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)\}$ 仍为 C^k 坐标卡集, 则称这两个坐标卡集等价. 每一 C^k 相容坐标卡集包含在一个惟一的完备的 C^k 相容坐标卡集中, 所以在构造微分结构时, 只要指出它的一个 C^k 相容坐标卡集就可以了.

具有 C^k 微分结构的拓扑流形 M , 即具有 C^k 坐标卡集等价类的流形, 称为 C^k 流形. 当流形 M 上给定了一个 C^∞ 微分结构, 则称流形 M 为光滑流形, 或称微分

流形(differentiable manifold).

当流形 M 上给定一个 C^∞ 微分结构, 即各映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为实解析函数, 它们在流形上各点均可展开为收敛的 Taylor 级数, 则称 M 为实解析流形(real analytic manifold).

在上述定义中, 将实数域 $\mathbb{R}^n$ 都换为复数域 $\mathbb{C}^n$, 当各映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为复解析函数(全纯函数)时, 则流形 M 称为复解析流形, 或简称复流形(complex manifold).

对微分流形, 可分析其上函数的可微性. 如图 1.5 所示, 设 f 为定义在流形 M 上的实函数, 即

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ M \ni p &\mapsto f(p) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

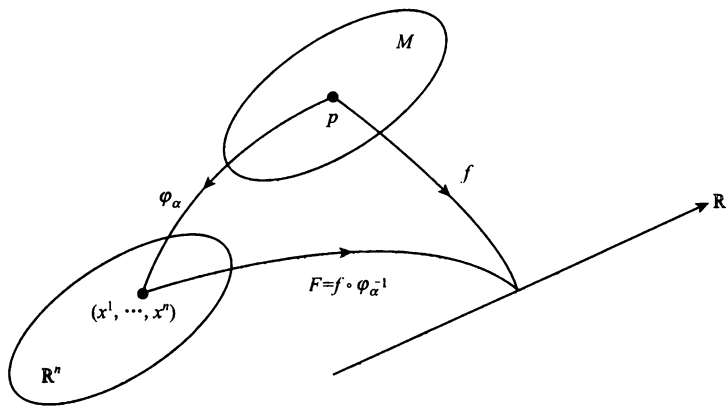


图 1.5 流形上的函数 $f(p)$

再设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为含有 p 点的一个容许坐标卡, 则 $F = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 开集上的实函数.

函数 f 在 p 点称为可微的, 如果函数 F 在 $x = \varphi_\alpha(p)$ 点为可微. 可以证明函数 f 的可微性与允许坐标卡的选取无关. 例如, 若有另一个含有 p 点的坐标卡 (U_β, φ_β) , 则因为

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

由于 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 属 C^∞ 类(为光滑的), 故 $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ 与 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在相应点都是可微的.

类似我们也可分析微分流形间连续映射的可微性. 例如, 设 f 为从 m 维微分流形 M 到 n 维微分流形 N 上的连续映射(见图 1.6)

$$f: M \rightarrow N$$

$$p \mapsto q = f(p)$$

在 M 与 N 的坐标卡集中,存在含 p 的 (U, φ) 与含 $q = f(p)$ 的 (V, ψ) , 则函数

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : x \mapsto y = F(x)$$

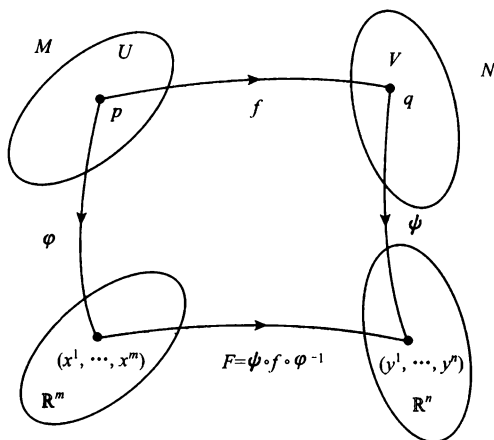


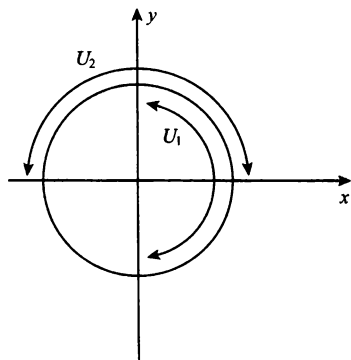
图 1.6 流形间的映射 f 及其诱导映射 F

$F(x)$ 的可微性决定了映射 f 的可微性. 以后为简单起见, 我们将常常不区别 f 与 F , p 点及其坐标 x , q 点与其坐标 y , 而认为 $q = f(p)$ 与 $y = F(x)$ 有相同含义.

当流形 M 与 N 具相同维数, 且映射 f 为同胚映射时, 如进一步要求此同胚映射可微, 则称为微分同胚 (diffeomorphism), 两流形微分同胚必同胚, 但是两个同胚的流形不一定微分同胚.

拓扑是研究连续性的最自然的数学结构, 所有拓扑空间可按是否同胚分为不同等价类, 而流形的微分结构是研究可微性的最自然的数学结构, 同胚的流形按其是否微分同胚又可进一步分类, 属于不同微分同胚等价类的流形具有不同的微分结构, 即同胚流形可能有不同的微分结构, 例如 Milnor 在 1956 年曾指出, 七维球 S^7 除典型的 $\mathbb{R}^8$ 中单位球面的微分结构外, 还可以有另一种微分结构: Milnor 怪球 Σ^7 , 两者同胚, 但不是微分同胚, 微分结构不同. 数学家还曾证明, 低维 ($d \leq 3$) 拓扑流形有惟一微分结构, 但是高维拓扑流形 (包括 $\mathbb{R}^4$) 常可存在多种微分结构. 在同胚的拓扑流形上可存在不等价的微分结构, 所以可以说微分结构有独立于拓扑结构的意义. 对于一个可微流形, 如何确定其上的微分结构, 是微分几何中最重要最困难的问题之一.

下面举几个微分流形的例子:

图 1.7 一维圆 S^1 **例 1.5** 一维圆 S^1 (图 1.7)

可表示为二维平面 E^2 中单位圆

$$S^1 = \{(x, y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

S^1 可取如下四个坐标卡来复盖:

$$U_1 = \{p \in S^1 \mid x > 0\}, \varphi_1(p) = y$$

$$U_2 = \{p \in S^1 \mid y > 0\}, \varphi_2(p) = x$$

$$U_3 = \{p \in S^1 \mid x < 0\}, \varphi_3(p) = y$$

$$U_4 = \{p \in S^1 \mid y < 0\}, \varphi_4(p) = x$$

以上四个开集 $\{U_i\} (i=1, \dots, 4)$ 构成 S^1 的一个开复盖. 下面分析相应坐标卡集 $\{(U_i, \varphi_i)\} (i=1, \dots, 4)$ 的相容结构.

在 U_1 和 U_2 的交叠区, 转换函数

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

它们都是光滑可微函数, 是 C^∞ 相容. 类似可证其余坐标卡相互都是 C^∞ 相容. 所以 S^1 是一维光滑流形.

例 1.6 二维球面 S^2 (图 1.8)

$$S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

可如下取球极坐标来表达 S^2 上 P 点的坐标:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

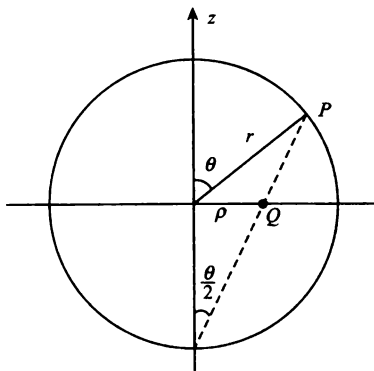
作极射投影, 在赤道平面上投射点 Q 的坐标

$$x_1 = \rho \cos \phi = \frac{x}{(1+z)}$$

$$x_2 = \rho \sin \phi = \frac{y}{(1+z)}$$

其中 $\rho = r \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = r \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)}$, 可取如下两坐标卡组成 S^2 的坐标卡集 $\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$:

$$U_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq -1\}; \quad \varphi_+ : (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{(1+z)}, \frac{y}{(1+z)}\right)$$

图 1.8 二维球面 S^2 的极射投影

$$U_- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq 1\}; \quad \varphi_- : (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{(1-z)}, \frac{y}{(1-z)} \right)$$

而以上同胚映射 $\varphi_{\pm}$ 的逆映射是

$$\varphi_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_+, \quad \varphi_+^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+\rho^2}, \frac{2x_2}{1+\rho^2}, \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \right)$$

$$\varphi_-^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_-, \quad \varphi_-^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+\rho^2}, \frac{2x_2}{1+\rho^2}, \frac{\rho^2-1}{1+\rho^2} \right)$$

在交叠区, $\varphi_+(U_+ \cap U_-) = \varphi_-(U_+ \cap U_-) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, 两坐标卡间的坐标变换

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(x_1, x_2) = \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\rho^2}, \frac{x_2}{\rho^2} \right)$$

是无穷阶可微的, 即它们是 C^∞ 相容的, 故 S^2 为二维光滑流形.

将 n 维球面 S^n 看作 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球面, 类似上述步骤, 可采用球极投射. 进而可证 S^n 为 n 维光滑流形, 这样得到的 S^n 的微分结构称为 S^n 上的标准微分结构 (standard differential structure on the n -sphere S^n).

例 1.7 李群流形 $G = \{g\}$

每群元 g 是一点, 整个李群 G 为流形, 可用群的定义表示中的实参数来表示李群流形的点坐标.

有些简单的群流形可与一些简单拓扑流形微分同胚. 例如

一维紧致 Abel 群 $U(1) = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 即么模复数乘法群, 与 S^1 流形微分同胚, $U(1) \cong S^1$.

$SU(2)$ 群, 其群元 g 的基本表示 (二维忠实表示) 是 2×2 么正矩阵 $g^\dagger = g^{-1}$, $\det g = 1$, 可表示为

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & x^3 + ix^4 \\ -x^3 + ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix}$$

满足

$$\det g = |a|^2 + |b|^2 = \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = 1$$

$SU(2)$ 群流形是三参数群, 相当于四维欧空间中单位球面 S^3 , 即 $SU(2) \cong S^3$.

例 1.8 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

$\mathbb{R}P^n$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 空间中通过原点的直线集合, 每直线为一点, 所有通过原点的直线集合形成 n 维流形. 即如点

$$(x^0, x^1, \dots, x^n) \sim (ax^0, ax^1, \dots, ax^n), \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

即当 $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, a 为任意非零实数, 可将 ax 看成与 x 相互等价 $x \sim ax$, 可把 x 的 $\sim$ 等价类记作

$$[x] = [x^0, x^1, \dots, x^n]$$

每等价类看成 $\mathbb{R}P^n$ 中一点, $\{x^i\}_{(i=0, \dots, n)}$ 称为 $[x]$ 的齐次坐标.

由于通过 $\mathbb{R}^{n+1}$ 原点的每根直线交 S^n 球面于两点, 故 $\mathbb{R}P^n$ 也相当于将 S^n 球面上各对顶点看成一点所形成流形, 即

$$\mathbb{R}P^n \simeq (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/(\mathbb{R} - \{0\}) \simeq S^n/Z_2$$

例如

$$\mathbb{R}P^3 \simeq (\mathbb{R}^4 - \{0\})/(\mathbb{R} - \{0\}) \simeq S^3/Z_2 \simeq \mathrm{SU}(2)/Z_2 \simeq \mathrm{SO}(3)$$

其中 $Z_2 \simeq S^0$ 为由两元素组成的群. 以上分析表明在 S^n 与 $\mathbb{R}P^n$ 间存在自然覆盖映射 φ :

$$\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n,$$

映射 φ 为 C^∞ 映射, 且局域具有 C^∞ 逆映射, 故由 S^n 的 C^∞ 微分结构可诱导出 $\mathbb{R}P^n$ 的 C^∞ 微分结构, $\mathbb{R}P^n$ 为 n 维微分流形.

例 1.9 复 n 维射影空间 $\mathbb{C}P^n$;

$\mathbb{C}P^n$ 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 空间中通过原点的复直线集合. 即在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 空间中建立等价关系 $z \sim cz$

$$(z^0, z^1, \dots, z^n) \sim (cz^0, cz^1, \dots, cz^n), \quad \forall c \in \mathbb{C} - \{0\}$$

可把 z 的等价类记作

$$[z] = [z^0, z^1, \dots, z^n]$$

每等价类 $[z]$ 看成 $\mathbb{C}P^n$ 中一点, $\mathbb{C}P^n$ 为复 n 维 (实 $2n$ 维) 微分流形.

下面我们以最底维的 $\mathbb{C}P^1$ 为例作更仔细地分析, $\mathbb{C}P^1$ 空间中各点齐次坐标为

$$[z] = [z^1, z^2] = [cz^1, cz^2] \quad (z^1, z^2 \text{ 不全为零})$$

$\mathbb{C}P^1$ 可用两个开集覆盖:

U_1 为 $z^1 \neq 0$ 的区域, 可选非齐次坐标

$$\zeta = \frac{z^2}{z^1} = u + iv$$

U_2 为 $z^2 \neq 0$ 的区域, 可选非齐次坐标

$$\zeta' = \frac{z^1}{z^2}$$

在交叠区 (z^1 与 z^2 都非零).

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad u, v \text{ 不全为零}$$

相容条件即 U_1 与 U_2 间映射

$$f: U_1 \rightarrow U_2$$

$$\zeta \rightarrow f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$$

$$(u, v) \rightarrow \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)$$

为复解析映射, 故 $\mathbb{C}P^1$ 为复解析流形. 如令

$$u = \frac{x}{1+z}, \quad v = \frac{y}{1+z}$$

则

$$\frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{x}{1-z}, \quad \frac{-v}{u^2 + v^2} = \frac{-y}{1-z}$$

与例 2 比较知 $\mathbb{C}P^1$ 与 S^2 有相同的微分结构, 即二者微分同胚, $\mathbb{C}P^1 \simeq S^3/U(1) \simeq S^2$.

$\mathbb{C}P^n$ 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 空间通过原点的复线丛, 它可以看作是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 空间中球面 S^{2n+1} 上的点, 还可差 $U(1)$ 相因子 $\{Z^*\} \sim \{e^{ia}Z^*\}$, 故

$$\mathbb{C}P^n \simeq S^{2n+1}/U(1) \simeq \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$\mathbb{C}P^1 \simeq S^3/U(1) \simeq S^2 \simeq \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$$

例 1.10 乘积流形

两微分流形的乘积流形 $M \times N$ 仍为微分流形. 设 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ 与 $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ 分别为 M, N 的坐标卡集, 对乘积流形 $M \times N$, 存在光滑的自然投影

$$\Pi_1: M \times N \rightarrow M$$

$$\Pi_2: M \times N \rightarrow N$$

于是 $\{U_\alpha \times V_\beta: \varphi_\alpha \circ \Pi_1 + \psi_\beta \circ \Pi_2\}$ 为 $M \times N$ 流形上的坐标卡集, 由它们决定了乘积流形的微分结构. 例如

$$\text{圆柱面} = S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\text{二维环面} \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$$

§ 1.3 切空间与切向量场

前两节分析了微分流形的特点, 流形 M 是局域像 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑空间, 并且是可微的, 可以利用分析工具来研究流形. 分析的一个重要方法就是分析对象的无穷小部分, 常可使问题线性化而便于研究. 例如:

函数在一点附近的性质可用其导数表示.

李群在恒等元附近的局域性质可用李代数表示.