第 8 章　纤维丛及其拓扑结构

§8.1　什么是纤维丛

1. 丛

丛(Bundle)包含三个内容：一个是底空间 B，一个是全空间 E，还有一个是丛的投影映射 Π。所以可以用(E,B,Π)来代表一个丛。E,B,Π 之间有如下的关系：

$$\Pi: E \to B \tag{8.1.1}$$

最简单的丛是乘积丛$(B_1 \times B_2, B_1, \Pi)$，其中 $E = B_1 \times B_2$ 是全空间，B_1 是底空间，投影映射 Π 的作用则是

$$\Pi: B_1 \times B_2 \to B_1 \tag{8.1.2}$$

更具体一些，如果 x_1 是 B_1 中的坐标，x_2 是 B_2 中的坐标，则(x_1, x_2)

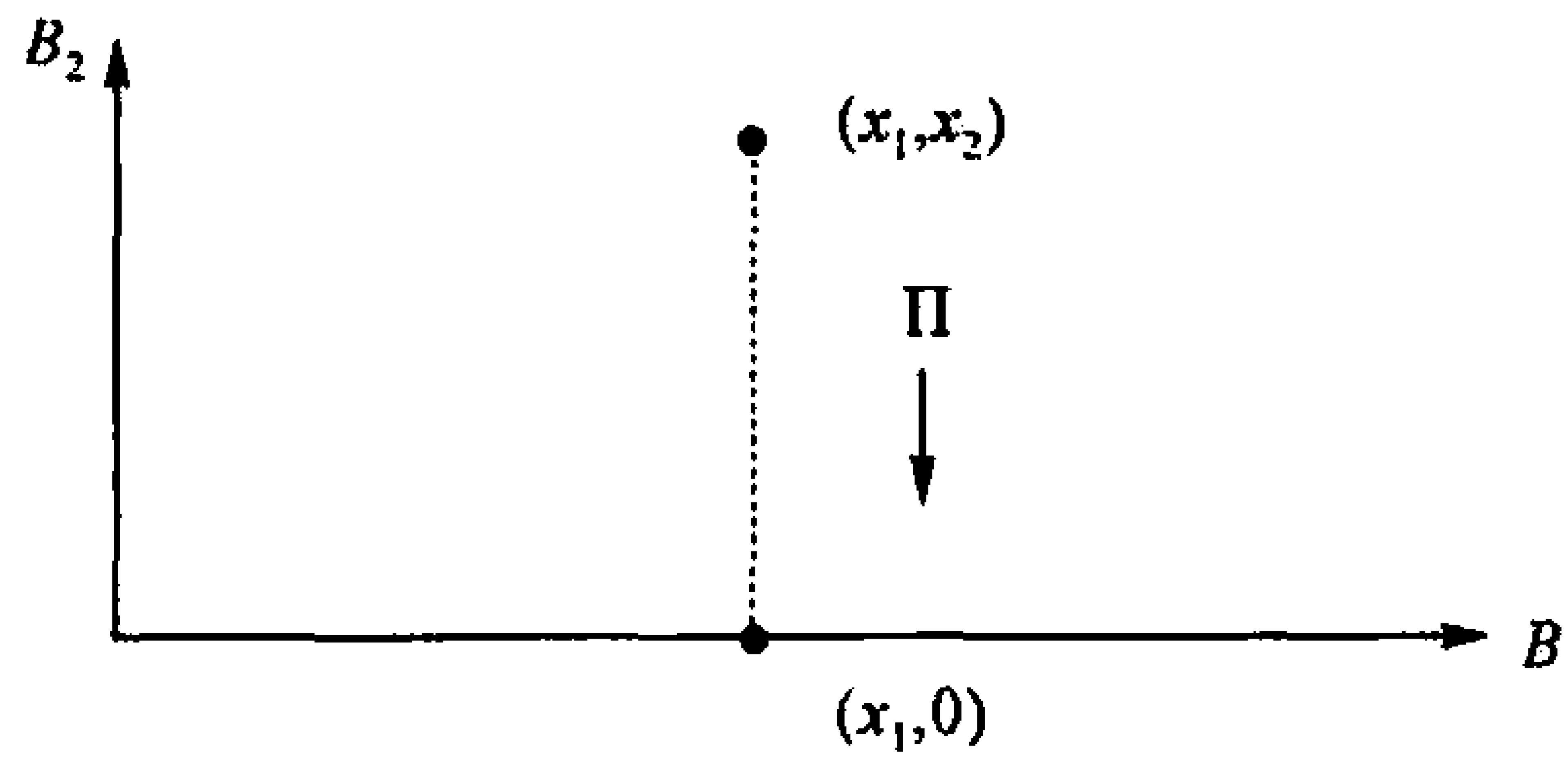

图 8.1.1

就是 $E = B_1 \times B_2$ 中的坐标(见图 8.1.1)。于是(8.1.2)式的 Π 的作

用在此可写成：

$$\Pi:(x_1,x_2)\to x_1 \tag{8.1.2}_1$$

把一条小纸黏成圆柱面，就可以得到一个最简单的乘积丛($S^1\times I,\Pi$)。其中 S^1 是一个圆，相当于底空间 B_1；I 对应于柱高，从属于 B_2 空间。见图 8.1.2。

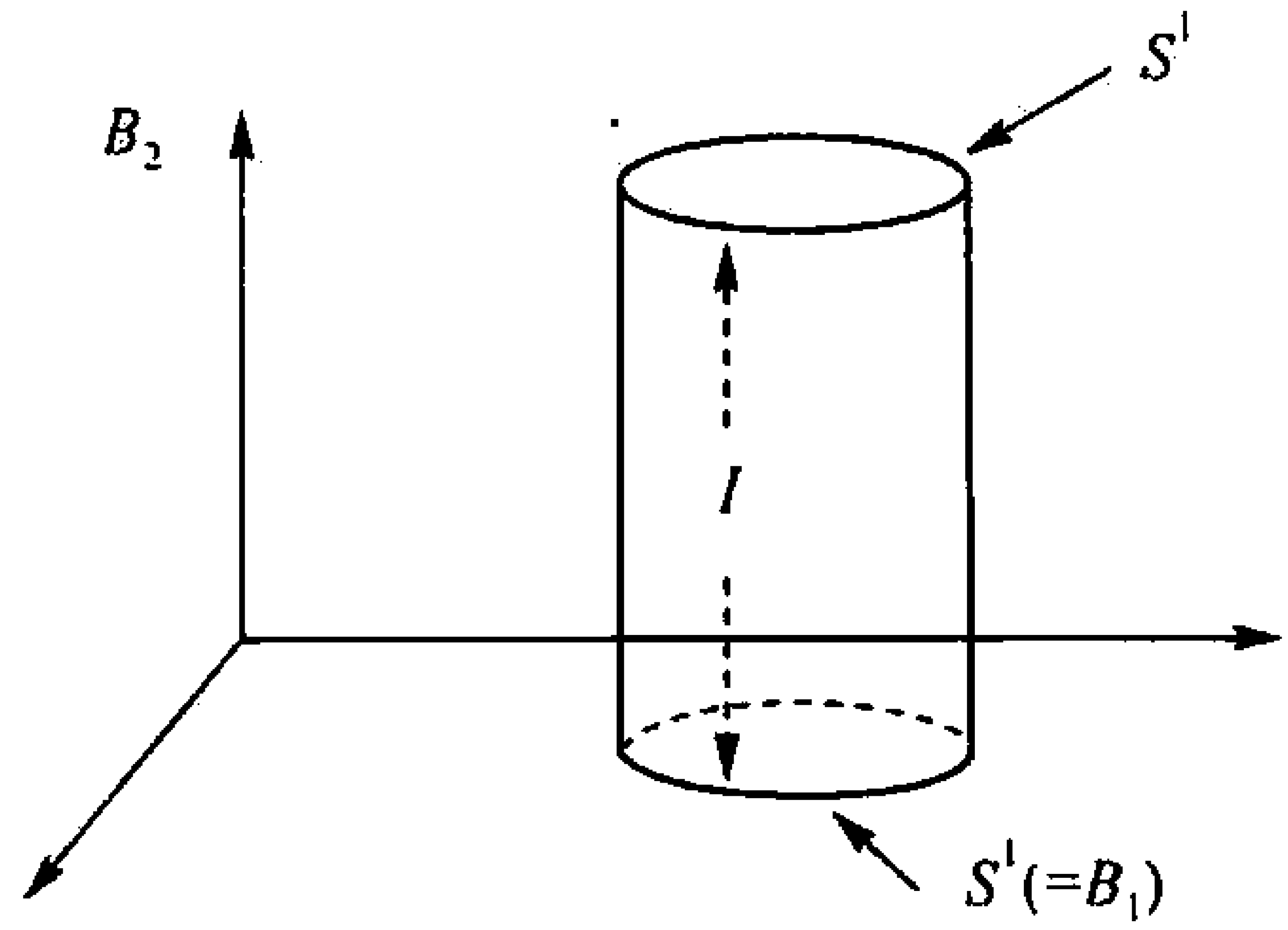

图 8.1.2

但在更一般的情况，例如在 Möbius 带的情况，从整体上看，E 就不再是两个空间的简单乘积了。然而在局部，仍可看作是两个局部空间的乘积 $U\times I$。$U(\subset S^1)$是 S^1 的某一个小部分(即 S^1 的一个开覆盖)，但需要另外再有一个机制，造成 Möbius 带在某处发生扭曲。所以有时也把纤维丛称为“扭曲的空间的乘积”。

我们还要求拓扑空间 $\Pi^{-1}(x)$(对于所有的 $x\in B_1$)同胚于某一个空间 F(其地位与上述乘积空间 $B_1\times B_2$ 中的 B_2 的某一个子空间相当)，即

$$\Pi^{-1}(x)=F_x,\quad F_x\text{ 同胚于 }F \tag{8.1.3}$$

则 F_x 称为底流形 B_1 上的 x 处的纤维，F 则称为标准纤维。

2. 纤维丛

纤维丛(Fiber Bundle)　如果一个丛(E,B,Π)的底空间 B 可以由一族开集$\{U_j;j\in J\leqslant N\}$来覆盖，而且各个 U_j 的纤维 $\Pi^{-1}(x)=$

F_x 都与一个标准纤维 F 有同胚映射关系，那末，全空间 E 就可以看作是一族纤维 $\Pi^{-1}(x)$（对于所有的 $x\in B_1$）的集合。由此出发，又设 U_α, U_β 是底空间 B 中的两个相交的开覆盖，则可以在其中取 p 点，（$p\in U_\alpha\cap U_\beta$），并且利用 U_α, U_β 的两个同胚映射 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ 得到（P 代表 U_α 或 U_β 上的一点）：

$$\varphi_\alpha:\ \begin{array}{l}\Pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F\\ x_p\to(p,\xi(p))\end{array}\qquad \varphi_\beta:\ \begin{array}{l}\Pi^{-1}(U_\beta)\to U_\beta\times F\\ x_p\to(p,\xi'(p))\end{array}\tag{8.1.4}$$

这里，$\xi(p)=\xi_p^1,\cdots,\xi_p^k$ 是纤维空间 F（k 维）中的一个矢量；$\xi'(p)=\xi'^1_p,\cdots,\xi'^k_p$ 是纤维空间 F（k 维）中的另一个矢量，而且有变换关系：

$$\xi^\alpha(p)=a_{\alpha\beta}(p)\xi'^\beta(p)\tag{8.1.5}$$

其中 $a_{\alpha\beta}(p)$ 是一个 $k\times k$ 矩阵（$\alpha,\beta=1,2,\cdots,k$）。

集合 $\{a_{\alpha\beta}(p)\}$ 组成一个群 $G=\{a_{\alpha\beta}(p)\}$，这个群（G）称为**结构群**，它给出纤维丛的结构。例如给出 Möbius 带的扭曲结构。

此外还注意到，$a_{\alpha\beta}(p)$ 应该是 x_p 随 p 变动的连续函数。

综合起来可以这样说，纤维丛除 E,B,Π 三个内容外，还有一个内容就是结构群 G。因此，应该用（E,B,Π,G）来代表一个纤维丛，与（E,B,Π）所代表的丛对比，纤维丛多了一个结构群 G。

由于标准纤维也是纤维丛的不可缺少的内容，所以还有一种写法，用（E,B,F,Π,G）来代表以 F 为标准纤维的纤维丛。有时把 B 写成 M，因为它代表底流形。

以下利用切丛 $T(M)=\bigcup\limits_p T_p(M)$ 作为例子，对纤维丛的特点作一些更具体的说明。

设切丛的底流形为 M（M 是一个 m 维流形），M 上 p 点的纤维 F_p 就是 $T_p(M)$。$T_p(M)$ 是 m 维向量空间，它与标准纤维 $F=R^m$ 同构。

再在 M 中选基矢组 $\{e_a(p)\}$，则 $T_p(M)$ 中任意切向量 X_p 可写成

$$X_p=\xi^a(p)e_a(p),a=1,2,\cdots,m,\xi^a(p)\text{是实数}\tag{8.1.6}$$

另外，在切丛 $T(M)$ 中还定义了投射变换 Π。前已说过，Π 的作用就是

$$\Pi: \quad T(M) \to M$$
$$X_p \to p \tag{8.1.7}$$

由于切丛在局域范围内是底流形 U_a 与标准纤维 $F=R^m$ 的乘积，于是有同胚映射

$$\varphi_a: \quad \Pi^{-1}(U_a) \to U_a \times R^m$$
$$X_p \to (p, \xi(p)) \quad (p \text{ 是 } U_a \text{ 上一点}) \tag{8.1.8}$$

若点 $p \in U_a \cap U_\beta$，则还存在另一个同胚映射

$$\varphi_\beta: \quad \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times R^m$$
$$X_p \to (p, \xi'(p)) \quad (p \text{ 是 } U_\beta \text{ 上一点}) \tag{8.1.8)$_1$}$$

$\xi(p)$ 与 $\xi'(p)$ 之间存在(8.1.5)式的变换关系。

可以在底流形 M 上的 p 点邻近选取局域坐标 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^m)$，则切空间的基矢 $e_a(p)(a=1,2,\cdots,m)$ 可以用自然标架写成

$$e_a(p) = e_a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{8.1.9}$$

我们对流形取坐标变换，p 点不变，切空间基矢 $e_a(p)$ 不变，所以不影响纤维空间 F 中的向量 $\xi^a(p)$（见(8.1.4)式），不影响转换函数 $a_{\alpha\beta}(p)$（见(8.1.5)式）和 $G=\{a_{\alpha\beta}(p)\}$。

3. 自洽条件

对于底流形 M 中的每一个点 x_i，都可找到它的一个邻域 U_i 和一个同构映射 Φ_i。这个同构映射 Φ_i 的作用就是把 $\overline{U}_i \otimes F$ 映射到纤维丛 E 的子集合 $\Pi^{-1}(U_i)$ 中去：

$$\Phi_i: (\overline{U}_i \otimes F) \to \Pi^{-1}(\overline{U}_i) \tag{8.1.10}$$

由于 $(x_i \otimes f) \in \overline{U}_i \otimes F (x_i \in \overline{U}_i, f \in F)$，所以利用式(8.1.10)就得

$$\Phi_i: \quad (x_i \otimes f) \to \Pi^{-1}(x_i) \tag{8.1.10)$_1$}$$

所以 $$\Pi(\Phi_i(x_i \otimes f)) \to \Pi\Pi^{-1}(x_i) = x_i \tag{8.1.10)$_2$}$$

可见这是一个必须满足的自洽条件。

由同构映射 Φ_i 又可以定义两个相交的领域 U_i 和 U_j 中的转移矩阵 Φ_{ij}（由 U_j 转移到 U_i）：

$$\Phi_{ij}=\Phi_i\Phi_j^{-1} \quad 当\ x\in U_i\cap U_j \tag{8.1.11}$$

Φ_{ij} 对于每一个给定的点 x（$x\in U_i\cap U_j$）的作用就是把 x 点在 U_j 上的坐标转换成 x 在 U_i 上的坐标。因此有如下性质：

$$\Phi_{ii}=I \tag{8.1.12$_1$}$$

$$\Phi_{ij}\Phi_{jk}=\Phi_{ik} \quad （当\ x\in U_i\cap U_j\cap U_k） \tag{8.1.12$_2$}$$

显然 (8.1.12)$_1$ 和 (8.1.12)$_2$ 式是所有的邻域 $U_i, U_j, U_k, \cdots$ 可以黏合成为整个纤维丛的充分必要条件。纤维丛的性质完全决定于转换矩阵的性质。

§8.2　纤维丛与截面

前一节已经说明，切丛 $T(M)=\bigcup_p T_p(M)$ 是一种纤维丛。若在（流形 M 上的）每一个 p 点的切丛纤维 $T_p(M)$ 中按照给定的（与 p 有关的）某种规则，选取一个切向量，则在整个 M 上就得到一个切向量场。由此就可把 M 上的切向量场看作是 M 上的切丛的截面，并且引出“截面”的定义如下：

定义 8.2.1　设 p 是底流形 M 上的一个点，$\Pi^{-1}(p)$ 是 M 上属于 p 点的纤维（纤维的维数一般取作 k，但切丛 $T(M)$ 的纤维的维数必须是 m，m 是底流形 M 的维数），在每一个 p 点的纤维 $\Pi^{-1}(p)$ 上选定一个 S_p，则底流形 M 上所有的各个点 p 的 S_p 集合就形成纤维丛的一个截面 $S(p)$。

（这里必须说明一点：纤维如果是矢量的集合，则 S_p 就是其中的