第一章　流形　微分流形与微分形式

在欧氏几何学中,认为两图形相等,是因为可通过欧氏运动(不改变两点间欧氏距离的运动)使两图形完全相重,欧氏运动的集合形成群,欧氏几何学正是研究在欧氏运动下空间图形的不变性质.注意到此点,19 世纪末(1871 年)Klein 对几何学及其分类作如下定义:存在一个集合(称为空间)E 及作用在此集合 E 上的变换群 G,几何是研究在变换群 G 作用下,空间 E 的不变性质.微分几何是研究微分流形在微分同胚变换下的不变性质.微分流形及其上张量场是微分几何的主要研究对象.

§1.1　流形　流形的拓扑结构

物理学中许多问题都要研究连续空间,如运动学和动力学中的普通时空,广义相对论中的弯曲时空,统计物理学中的相空间,规范理论中的内部空间与相应的底空间(普通时空)等,它们的共同特点都是具有确定维数的连续空间,为研究它们,提出流形概念.流形是我们熟悉的点、线、面以及各种高维连续空间概念的推广.可如下定义流形(manifold):

"n 维流形局域像$\mathbb{R}^n$",更确切的说,"流形是这样一个 Hausdorff 空间,它的每点有一个含有该点的开集与$\mathbb{R}^n$ 的开集同胚".

上面这句话中有几个数学名词($\mathbb{R}^n$,开集,同胚,Hausdorff 空间)要简单解释一下:

1) 实 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ 是实数域上 n 维线性空间,它的元素 x 叫做向量或点,可用 n 个实数表示

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x^i \in \mathbb{R}$$

实数 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$称为向量 x(或称为点 x)的坐标.

在$\mathbb{R}^n$ 中两任意向量 x,y 间可定义加法,向量相加仍为向量,$x+y=z\in\mathbb{R}^n$,其坐标为对应坐标相加

$$z^i = x^i + y^i$$

这样定义的加法满足 Abel 群的规则,即有零元,有逆元,可结合,可交换.

在实数 $a\in\mathbb{R}$ 与向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 间可定义乘法

$$ax=(ax^1,ax^2,\cdots,ax^n)\in\mathbb{R}^n$$

这样定义的乘法满足结合律:

$$a(bx)=(ab)x$$

并在乘法与加法间满足分配律

$$a(x+y)=ax+ay$$

这样就在$\mathbb{R}^n$ 中定义了向量加法和向量对实数乘法运算,使$\mathbb{R}^n$ 成为实数域$\mathbb{R}$上的 n 维向量空间.类似可定义复数域上的 n 维向量空间$\mathbb{C}^n$.总之可如下定义$\mathbb{R}^n$:

定义 1.1 实数域上 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$ 是这样一个空间,其每个元素可用 n 个一定秩序的实数表示,在其元素间定义有加法(满足 Abel 群运算规则),并定义有元素与实数的乘法(满足结合律与分配律).

2) 开集(open set)与连续映射(continuous mapping)

为了分析空间及其映射的连续性,一般常利用距离函数(度规)来定义.但是我们知道,连续性仅与邻近性有关,改变距离函数的定义(改变空间的度规)不会改变连续性,不会改变无穷点列的极限点等问题,故我们常需摆脱距离函数而研究比度规空间更抽象的拓扑空间,只注意点的邻近性而不注意其距离,可引进开集概念.开集是描述空间拓扑性质的基本概念,其严格表述可参看附录 B,这里我们给开集一个较直观的通常拓扑(usual topology)定义,它是在微分几何中所适用的定义.

定义 1.2 开集 A 是空间S 的子集合,A 中每点的“邻域”完全在 A 中.

这里“邻域”可用任意距离函数来定义,而上述开集定义应与所选距离函数无关.

例如,实数轴$\mathbb{R}^1$(一维线性空间$\mathbb{R}^1$)上不含端点的开区间(a,b)是开集,但是含有端点的闭区间$[a,b]$不是开集,因为其端点 a,b 的“邻域”并未完全属于此区间$[a,b]$.

在定义 1.2 中的某点“邻域”是指距该点距离小于某给定实数的点的集合,在定义“邻域”时,需借助距离函数,但是我们强调此“邻域”可用任意距离函数来定义,与所选距离函数无关.例如,对$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 x 和 y,可采用下列两种距离函数:

$$d_1(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^n(x^i-y^i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y)=\max|x^i-y^i|$$

利用 d_1 定义的“邻域”为圆盘,利用 d_2 定义的“邻域”为正方体,不同距离函数定义的“邻域”形状不同.但是由于任意圆盘内有正方体,任意正方体内有圆盘,故若利用距离函数 d_1 得到 A 为开集,则相对于距离函数 d_2,A 仍为开集.这样定义的开集与“邻域”形状无关,与所选距离函数无关.

流形上连续函数 $f(x)$，即流行 M 到实数域上的连续映射 $f:M\to\mathbb{R}$. 定义连续函数，通常采用大家熟悉的 ϵ-δ 说法，需要利用距离函数. 对于没有定义距离函数的拓扑空间，可利用“开集”如下定义连续映射：

定义 1.3 流形间映射 $f:M\to N$，如它满足 N 中任意开集的逆像是 M 中的开集，则此映射为连续映射.

与开集定义相关的还可引入闭集，开邻域等概念：

定义 1.4 闭集(closed set)：开集 A 在集合 S 中的补集称为闭集. 闭集包含它的所有极限点.

定义 1.5 开邻域(open neighbourhood)；集合 S 中一点 a 的开邻域 N 是 S 的子集合，它含有点 a 所属的某开集.

3) 同胚映射(homeomorphic mapping)与流形的拓扑性质

空间的几何性质常常是指空间在某些变换群作用下的不变性质，且可根据变换群特点对几何学进行分类. 例如非奇异线性变换，使直线仍变为直线，保持空间的仿射性质，研究这种性质的几何学称仿射几何. 其中正交变换还进一步保持图形的欧氏分类，研究在正交变换下不变性质的几何学称欧氏几何学. 现在我们需讨论更广泛的空间，其中已无直线概念，因此应讨论比线性映射更广泛的一些映射. 我们首先想到前面所提到的连续映射，它保持图形各点的邻近性不被破坏. 但是连续映射不能保持流形的维数，例如著名的 Peano 曲线(1890 年)，是一种将一维实轴区间 I 连续地满映射到二维区间 I^2 上的映射 $f:I\to I^2$，映射 f 被定义为映射族 f_n 的极限，$f_n:I\to I^2$，$f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$. 图 1.1(b)，(c)，(d)给出了前三步 $f_1(I)$，$f_2(I)$，$f_3(I)$，而(a)表明第一步 $f_1(I)$的作图方法：连接正方形 I^2 的对角线，将正方形作三角分割，然后再将各相邻三角形中点连接. 类似，很容易推广至第任意 n 步的 $f_n(I)$，在第 n 步后，二维区间 I^2 的所有点都在 $f_n(I)$的 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的距离内. 于是在 $n\to\infty$的极限下，得连续的满映射 f，它使一维区间 I 映满在二维区间 I^2 上.

注意上述映射并非 1-1 对应，而只是使二维区间 I^2 上所有点均在像 $f(I)$的邻域内. 上例说明，连续满映射不能保持流形的维数. 为了保持流形维数，应对连续映射给以进一步的限制.

另一方面，我们知道 1-1 对应是区别集合的标志. 但是 1-1 对应也不能保持空间维数，如 Cartan 的例子，可使 2 维开区间

$$I^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x,y<1\}$$

的点(x,y)与一维开区间

$$I=(0,1)=\{z\in\mathbb{R}\mid 0<z<1\}$$

的点 z 间建立 1-1 对应，即按十进位无限小数表示 x 与 y(因为 $x,y\in(0,1)$)

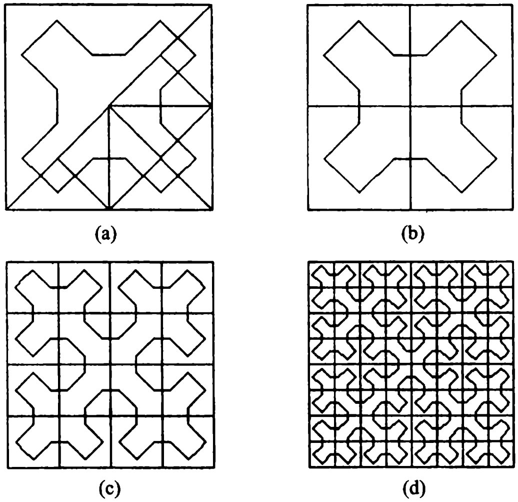

图 1.1
(a)Peano 曲线作图法示意,
(b),(c),(d)Peano 曲线 $f_n(I)$的前三步

$$x = 0.x^1x^2\cdots$$
$$y = 0.y^1y^2\cdots$$

由上两数可作小数

$$z = 0.x^1y^1x^2y^2\cdots$$

显然 $z\in(0,1)$,于是建立了由二维区间 I^2 1-1 对应于一维区间 I 上的映射.注意这时是 1-1 对应,但不是连续映射.

将上两者结合,可得到保持流形维数的同胚映射:

定义 1.6 同胚映射为 1-1 对应的连续满映射,且其逆映射也是连续的.

连续映射保持流形各点的邻近性,当进一步要求流形中任两不同点仍映射为不同点,且不会产生新的点,即同胚变换.可将流形的同胚变换想像成流形用橡皮做成,可任意拉伸、弯曲,但不允许撕裂(一分为二),也不允许把不同点粘在一起(二合为一).

在同胚映射下保持不变的性质为拓扑性质,如开集、收敛序列、紧致性、分离性、连通性等都是拓扑性质,请参看附录 B 的简单介绍.

4) Hausdorff 空间与流形的可分性(separation)

定义 1.7 Hausdorff 空间是这样一个空间,其中任意两不同点 a 与 b 间,均有不相交的开邻域.即存在开集 U_α 与 U_β

$$a\in U_\alpha,\quad b\in U_\beta$$

而 $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.

在流形定义中强调流形是一个 Hausdorff 空间,就强调了流形的可分性,使连接任意两点的连线可无限再分.描述流形的可分性有许多种不同的说法,而定义 1.7 的叙述是可分性公理中较强的一个,也是微分几何中最常用的一个.

具有通常拓扑的实数域是 Hausdorff 空间.Hausdorff 空间的点都是闭集.

在我们简单介绍了以上几个常用的数学名词后,让我们再强调复述一下流形的定义:

定义 1.8 实(复)n 维流形是这样一个 Hausdorff 空间,它的每点有开邻域与 $\mathbb{R}^n$($\mathbb{C}^n$)的开集同胚.

下面举些简单例子说明流形的概念.

例 1.1 圆 S^1 是一维流形.

例 1.2 图 1.2 中所画的一些一维图形都不是流形,因为在结点处开邻域不与 $\mathbb{R}^1$ 的开集同胚.

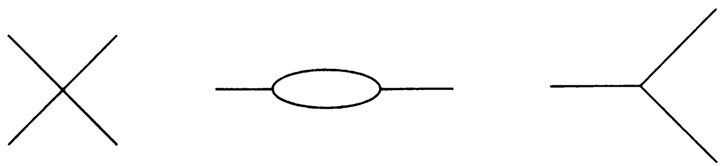

图 1.2 不是一维流形的图形举例

例 1.3 三维欧氏空间 E^3 中单位球面 S^2 是一个二维流形.

例 1.4 E^3 中锥面

$$M = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$$

不是流形,因为在原点邻域不与 $\mathbb{R}^2$ 同胚.如再进一步限制为 $x \geqslant 0$,即为半个锥面

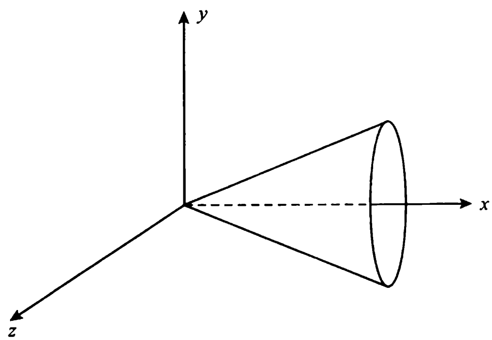

图 1.3 E^3 中半锥面

$$M_0 = \{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0, \text{且 } x \geqslant 0\}$$

为二维流形.下节我们将进一步分析流形的微分结构,说明半锥不是光滑流形(不是可微流形),因其原点处非光滑.

§1.2　微分流形　流形的微分结构

为了对流形上函数及流形上张量场进行微分运算,常可对流形引进坐标系,可利用流形 M 上的开集对$\mathbb{R}^n$ 的开集的同胚映射来对流形 M 引入局部坐标系.由流形的定义知流形局域像$\mathbb{R}^n$,流形中任一点都有含该点的开集 U 与$\mathbb{R}^n$ 的一个开集 V 同胚,令 φ 为相应的同胚映射

$$\varphi: U \to V = \varphi(U)$$

流形 M 上点 $p \in U$,其像 $\varphi(p)$在$\mathbb{R}^n$ 中的坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就叫做 p 点的坐标,这样利用对$\mathbb{R}^n$ 上开集 V 的同胚映射 φ,可对流形 M 上开集 U 内各点建立坐标系.(U,φ)称为流形 M 上的局部坐标系,或简称坐标卡(chart).

流形的局域可用坐标刻划,同时又可随时变换坐标,我们在下面讨论中,一方面要利用坐标系这个工具,同时又要不受坐标系的束缚,虽然有时明显地写出坐标表达式,但是更通常的是写出在坐标变换下不变的形式.流形的某一局部坐标系本身没有几何意义,而我们主要研究与坐标变换无关的一些不变量.

过去对空间建立坐标系时,常利用空间的度量性质.而我们在建立局部坐标系时,利用了同胚映射,可完全不受度量的约束,可研究流形在同胚变换下的不变性质.爱因斯坦从发表狭义相对论(1908 年)到发表广义相讨论(1915 年)花了七年时间,他说:“为什么建立广义相对论又用了七年时间呢? 主要原因是,要摆脱坐标必须有直接度量意义这个旧概念是不容易的.”本书从开始就采用不受度规限制的,可任意进行坐标变换的坐标系,何时引入度量,使流形成为黎曼流形,我们要特别声明.在本书前三章分析没有定义度规的微分流形的性质.

n 维流形一方面局域像$\mathbb{R}^n$,另方面,一般不能将整个流形 M 与$\mathbb{R}^n$ 的开集同胚.例如,二维球面 S^2 最少需用两个开集覆盖.若整个流形 M 需用若干个开集$\{U_\alpha\}$所覆盖,

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M$$

开集族$\{U_\alpha\}$称为流形的开覆盖.而所有坐标卡的集合

$$\mathscr{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$$

称为流形 M 的坐标卡集(atlas).若开集$\{U_\alpha\}$中两个开集 U_α 与 U_β 间有交,$U_\alpha \cap$