场 $\begin{cases} \vec{v}(\vec{x}) \\ \vec{B}(\vec{x}) \\ \vec{E}(\vec{x}) \\ \vec{T}(\vec{x}) \\ \vdots \end{cases}$ 函数/算子

$\langle U|V\rangle \in \mathbb{C}$

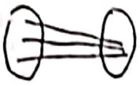
数学中: $|V\rangle \in V$

$\langle U| \in V^*$ 什么!

理解: $\begin{cases} ① \ V^* \times V \to \mathbb{C} \\ ② \ V^*, V \to \mathbb{C} \end{cases}$

投影

映射 $\{$ Morphism 态射



Homomorphism 同态

Homeomorphism 同胚

Isomorphism 同构

特殊映射 ($\hookrightarrow$, 等)

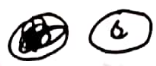
交换图

等价关系 $\longleftrightarrow$ 分类 $\longleftrightarrow$ 群分类的关系.

典型例子: ① $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ $\quad \psi_k$: $[k] = \{k + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathbb{R}/\sim \ \cong [0, 2\pi) \cong S^1$. $(x^2+y^2=1)$

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1 \cong T^2$. (Torus).



②多值函数: $\vec{A} + \nabla\phi \longleftrightarrow \vec{B}$

$[\vec{A}] = \{\vec{A} + \nabla\phi \mid \phi$ 为M上的连续函数$\}$

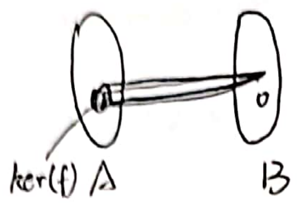
线性空间

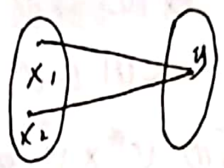
$f: A \to B$

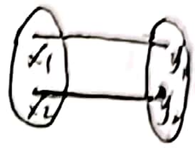
$A: R^M \to R^N$ (M维空间映射到N维空间.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}$$

如果 $M>N$，在A中存在∞多x 使 $Ax=0$







$a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_Mx_M=0$

(有无数多x满足)

$\begin{cases} Ax_1=y \\ Ax_2=y \end{cases}$

$A(x_1-x_2)=0$

$x_1-x_2\in \ker(f)$

$\begin{cases} Ax_1=y_1 \\ Ax_2=y_2 \end{cases}$

$A(x_1-x_2)\neq 0$

$x_1-x_2\notin \ker(f)$

$[x]=\{x \mid Ax=0,\ x\in A\}$

$\vec{A} = \vec{A}+\nabla\phi$

$\nabla\vec{A}\to\nabla\vec{A}+\nabla(\nabla\phi)\to 0$

结论:

1. $A/\sim \ \cong B$ 即双射

或 $A/\ker(f)\cong B\cong \mathrm{im}(f)$

2. $\dim(A)-\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{im}(f))$

即 $M=\underline{(M-N)}+N$

作业：

证明A是矩阵(非方阵)，$z=tr(e^{-tA^{+}A})-tr(e^{-tAA^{+}})$，和t无关，

结论：$z=M-N$，$(A\in R^{M\times N})$

开始.

Topo相关的基本概念.

1. 空间/set(无定义) ⇒ 理发师悖论.

$\begin{cases} E^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \text{基矢.} \\ \text{Hilbert Space.} \\ \text{Unitary Space.} \end{cases}$ $\vec{v}=\sum v^i\vec{e}_i$

2. 离散 → 点~~粗~~集拓扑
连续

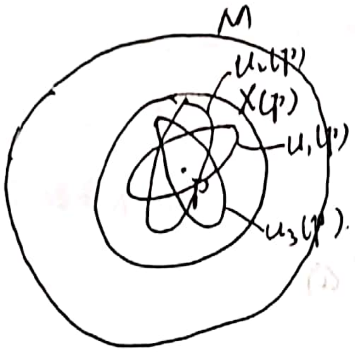
Topo定义：X是任意集合，$T=\{U_i\}$，其中U_i是X的子集，满足：

① $\emptyset, X \in T$

② 任意开 $\in T$ ⇒ U_i的任意多或无穷多个开 $\in T$

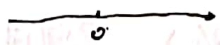
③ 有限交 $\in T$ ⇒ U_i的有限个交 $\bigcap_{i=1}^{N} U_i \in T$ $(N \neq \infty)$

The pair (一对) (X, T) is a Topology. 或 X是一个拓扑空间.



$U_i(p) \subseteq X(p)$

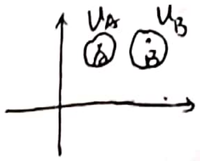
~~有限交合集~~ $U_i=(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} U_i=(-1,1)$



$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_i=\{0\}$

① Neighborhood (邻域/近邻) ⓟ

② Hausdorff Space → 空间可分



③ Cover (覆盖)

open cover (开覆盖)

$X=\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ —开集, $A_i \in X$

特殊：① $N \to \infty$
② $N \to$ 有限 ⇒ Compact (紧致)

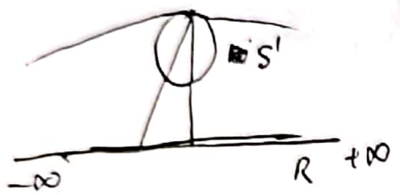
例如：R不是compact；R^2也不是；$[0,1]$是compact；$(-1,1)$不是

~~结论~~：

④ one-point compactification $\Leftrightarrow S^n = R^n \cup \{\infty\}$

问: R 和 S^1 是否一样?

$S^1 - \{\infty\} = R^1 \Rightarrow S^1 \simeq R^1 \cup \{\infty\}$



⑤ Connectness (连通性)

空间多少块

A = 

A = 

⑥ Homomorphism (同态) 群同态

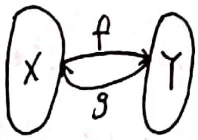
Homeomorphism (同胚) 空间同胚 ⇒ 空间等价

isomorphism (同构) 群同构

同胚:
双射

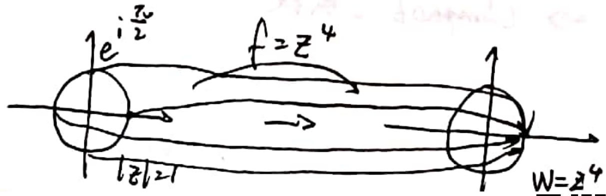
~~双射~~

$f: X \to Y$ 是连续的, 且 $f^{-1}: Y \to X$ 是连续的.



$f \circ g = id_Y$ (identify map).
$g \circ f = id_X$

$f: S^1 \to S^1$



f^{-1}不存在

∴两个空间非同胚.

3. Topo invariant (拓扑不变量)

Z or Z_2 的性

☆ #(数) (Euler number, ~~Chern~~ chern# 陈示数)

☆ algebra structure (Group, Ring).

☆ Connectness, Compactness, Hausdorff property

☆ 其它

问：如何判断X与Y同胚？（很难，不知道）

☆ 如果 $X \simeq Y$，上述性质保持（不变量相同）.

☆ 反之，不一定对，

☆ 上述性质不同，X与Y肯定不同胚.

例子：

① $[-1,1]$ 与 $(-1,1)$ 不同胚（紧致性不同），但 $(-1,1) \simeq R$ ($y=\tan\frac{\pi}{2}x$)

② $A \simeq B$，$B \simeq C$，$\Rightarrow A \simeq C$.

③ $D^2=\{x^2+y^2<1 \mid x,y\in R\} \simeq R$ $\quad f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$，$f^{-1}$ 存在.

4. Euler 示性数

Euler Characteristic

1. 空间可以用Z区分

2. 第一个例子为 Euler 示性数

3. 推广 $\Rightarrow$ ~~Guess~~ Gauss Bonnett Number

Chern# / TKNN#

K: 多面体 (polyhedron) $\quad \chi(K) = $ 点 $-$ 线 $+$ 面 $= V-E+F$

点 $V=4$　　$V=8$

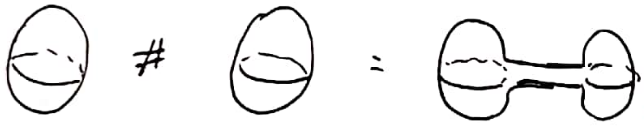
线 $E=6$　　$E=12$

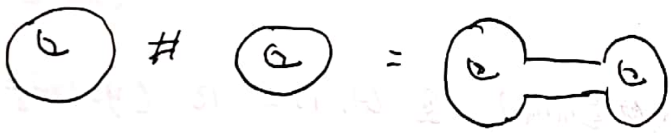
面 $F=4$　　$F=6$

$$\chi(\triangle) = \chi(\square) = \cdots = \chi(\bigcirc)$$

如果 $X \simeq K$，则 $\chi(X) = \chi(K)$

Connect Sum 连通和 # $\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$





$\chi(\text{torus}) = 0$

$\chi(\text{double torus}) = -2$

亏格 $\chi(K) = 2(1-g)$　g：洞的个数

g：genus

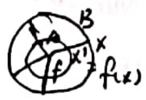
Euler示性数的意义：用一个整数刻画同胚关系。

物理：Euler# → TKNN# ⟺ Gauss-Bonnett ~~Theorem~~ Theorem.

拓扑数 $\chi(X) \neq \chi(Y)$，则 X 和 Y 不同胚。

空间 + 结构

流形 manifold.

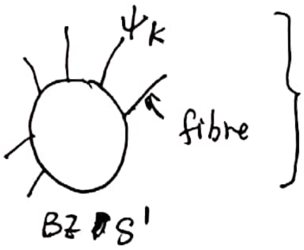


$A \simeq B$

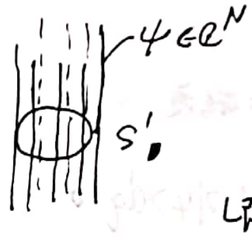
"不能用一张纸包住一个鸡蛋" ⇒ S^2 …

若一个空间的局部与 $\mathbb{R}^n$ 同胚，则其为流形。

Fibre bundle（纤维丛）



} Fibre bundle

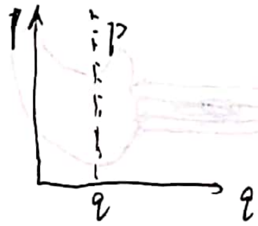


$S^1 \times \mathbb{C}^N$

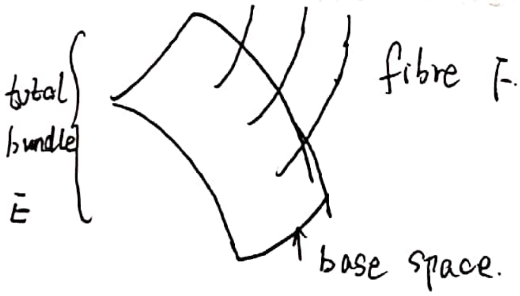
（平凡丛）

$(q, \dot{q})$ 相空间 $\Rightarrow$ $Q \times P$ 直积，

$p = p(q)$



Fibre bundle: locally, direct product; globally, not.



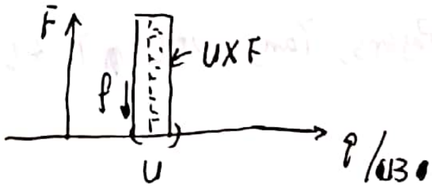
F: fibre (ψ_k or p)

E: total bundle

B: base space (S^1 of k, q in CM)

E: $\begin{cases} \text{locally} \cong B \times F \\ \text{globally not} \end{cases}$

$f: E \to B$ (projection $\Rightarrow N \to 1$).



$h: f^{-1}(U) \cong U \times F$

Geometry phase. $\oint p\,dq$ 量子: $\langle \psi(q) | \hat{p} | \psi(q) \rangle$

$H = \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = B_{\parallel} \cos\phi\, \sigma_x + B_{\parallel} \sin\phi\, \sigma_y + B_z \sigma_z = H(\phi)$ $\phi(t)$ 含时间。 q 提供的外参数