2021.3.25

☆ 磁单极子实空间找不到

在 K 空间找到.

☆ 绝热不变量

$$I = \oint p \cdot dq = nh.$$

$\downarrow$ 几何相

$$\oint \underbrace{\langle \phi_R | \partial_R | \phi_R \rangle}_{\sim \text{常数}} \, dR.$$

☆ 其它数学中不变量.

拓扑：

① 闭邻域.

② 放弃距离.

③ 形变.(映射.mapping).

物理中相关东西.

1: $L(q_i, \dot{q}_i)$ or $H(p_i, q_i)$, $M = (q_i, \dot{q}_i)$

2: $\psi(\vec{x}) \Rightarrow \psi: X \to \mathbb{C}^N$

3: $\vec{E}(\vec{x})$, $\vec{B}(\vec{x})$.

ref: Nakahara书第二章.

1: Map 映射 　　　　　　morphism 态射

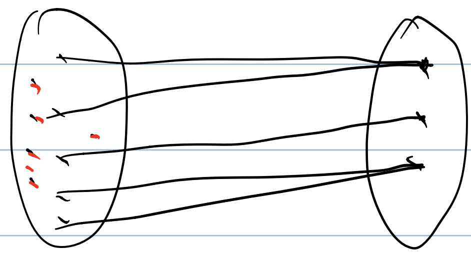
$f: X \to Y$

$\begin{cases} X: \text{set 集} \\ Y: \text{set} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{单射} \\ \text{满射} \\ \text{双射} \end{cases}$

△ 单射：
injective

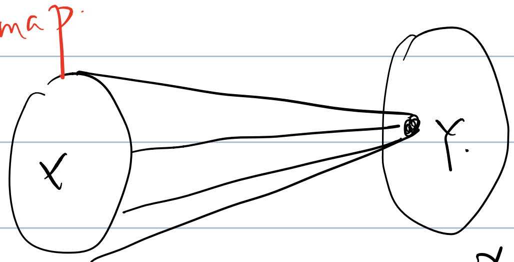
△ 满射
surjective



对任一个 y，有 x 与之对应，X 里面可以有多余

△ 双射 ～　　既是单射，又是满射，可逆
bijective
(一一对应?)

△ 常数映射 $C: X \to Y$
const map



映射到某一个值（数）

$x \in X \Rightarrow C(x) = y_0 \in Y$

△ inclusion map. $i: A \to X$，其中 $A \subset X$

$x \in A,\ i(x) = x \in X$

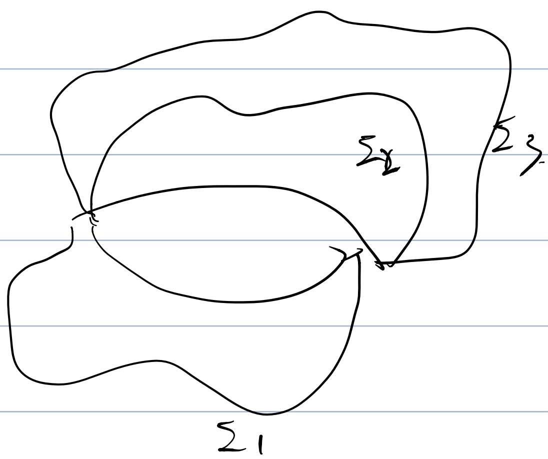
identical map $id_X : X \to X$.

$id_X(x) = x$.

等价类:

1. $k \to k + G$. , $\{k + nG\}$

2. Stoke定理



$\{\Sigma_n\}$.

3. $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\phi$.

$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$

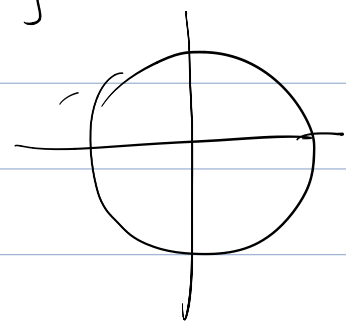
等价类定义:

商群：等价类的集合：

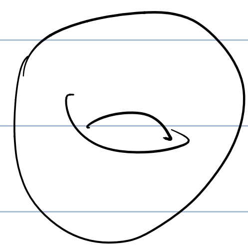
等价关系，典型例子，BZ

$\psi_K: [K] = \{K + 2\pi n \mid n \in Z\}$

$\mathbb{R}/\sim \;\simeq [0, 2\pi) \simeq S^1 \rightarrow$



$\mathbb{R}^2 / Z^2 \simeq S^1 \times S^1 \simeq T^2$



$\boxed{\text{线性空间变换.}}$

$A: R^M \to R^N$

$$\begin{array}{c} Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}}_{x \in R^M} \\ \downarrow \\ \in R^N \end{array}$$

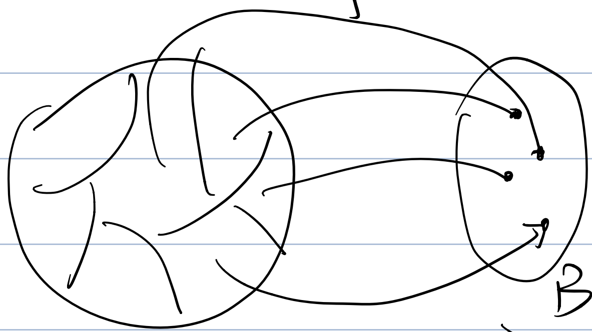
If $M > N$，在A中存在∞的x，使$Ax = 0$

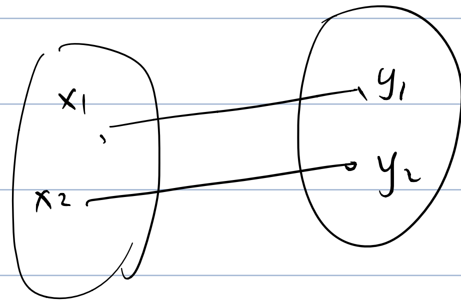
$\begin{cases} Ax_1 = y \\ Ax_2 = y \end{cases}$ $\quad Ax_1 - Ax_2 \neq 0$

$x_1 - x_2 \in Ker(f)$

$A(x_1 - x_2) = 0$

$x_1 - x_2 \in Ker(f)$.





$\Longrightarrow \begin{cases} A/\sim \;\cong B \\ A/ker(f) \cong B \cong im(f) \\ dim(A) - dim(ker(f)) = dim(im(f)) \end{cases}$

作业: A 矩阵(不是方阵)

$Z = Tr(e^{-tA^{+}A}) - Tr(e^{-tAA^{+}})$

和 t 无关，而且为 Z.

结论 $M-N$ if $A \in R^{M\times N}$.