2) 统一 Stokes 定理中 $\langle \partial D, w \rangle = \langle D, dw \rangle$

不同曲面对应的相同边界有相同的结果.

3) 不变量.

1. $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} = z$

2. $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q_t \neq Q$.

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = Q \neq 0$ monopole. (磁单极子)

→ k-Space

$\oint \vec{B}_{\vec{k}} \cdot d\vec{S}_{\vec{k}} \neq 0$.

3、$I = \oint p\, dq$ 绝热不变量.

$= nh$ 旧量子 索默菲…

几何意义. [量子化 vs 几何] 问题

4. 几何相

$$\gamma = \oint \underbrace{\langle \phi(\vec{R}) | \nabla_R | \phi(\vec{R}) \rangle}_{\text{动量平均值}} d\vec{R} = \oint \vec{\Gamma}_R\, d\vec{R}$$ Berry 1981 或 1983

5、其它：数学中.

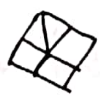
哥里斯堡七桥问题.

染色问题

欧拉(Euler)数. $\chi(k) = V - L + F$

0维 1维 2维.

点数 线数 面数



高维：0维 − 1维 + 2维 − 3维 + ···

立体角 $4\pi$ $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$

~~不变量~~

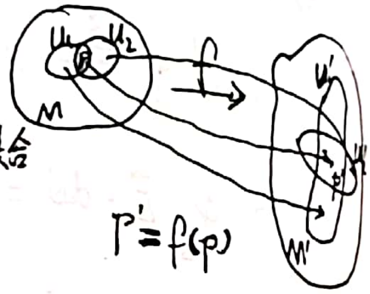
不变量和几何相关，和细节无关。

开始.

Topo 相关.

1. 放弃距离, 用邻域/近邻表示 (Neighborhood)

用开与交描述 Topo 形变

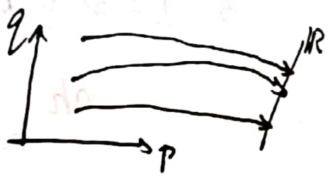



2. 放弃距离, 用点P代替坐标.
坐标有时不是物理量的参变量。

3. 形变 ⇒ 映射 (mapping), $P'=f(P)$

4. $f: M\to M'$ 映射

物理中相关的东西:




1. 拉氏量 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 或 哈密顿量 $H(p_i,q_i)$

$M=(q_i,\dot{q}_i)$ 或 $(q_i,p_i)$ 相空间. $L: M\to\mathbb{R}$ (实空间)

2. $\psi(\vec{x})\Rightarrow\psi: X\to\mathbb{C}^N$ (复数域)

3. $\vec{E}(\vec{x}), \vec{B}(\vec{x})$: $\vec{E}: X\to\mathbb{R}^3$

4. $H_k=e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}He^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ $H$: BZ (第一布里渊区) → Hilbert Space.

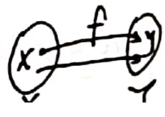
数学定义与术语.

ref: Nakahara 书第二章.

1. ~~映射~~ map 映射

$f: X\to Y$ 表示 $y=f(x)$ $x\in X$, $y\in Y$

X: set (集合).
Y: set

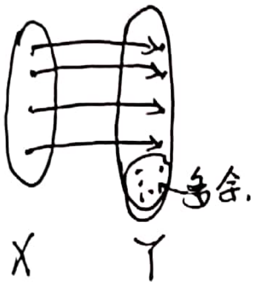



1-1映射 ⇒ $f^{-1}$存在

☆ 单射.
{ 满射.
双射

~~morph~~ morphism 态射.

单射: injective

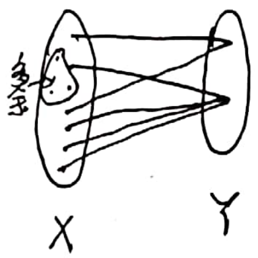



对于 $x \neq x' \in X$

有 $f(x) \neq f(x')$

one-to-one.

满射: surjective




$x \neq \forall y \in Y$

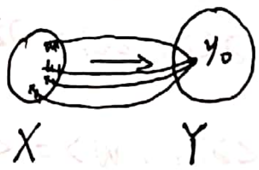
存在至少一个 $x$

on-to.

双射: bijective

即是单射 又是满射 / 可逆

Const map 常数映射. $C: X \to Y$




$x \in X \Rightarrow C(x) = y_0 \in Y$

inclusion map $i: A \to X$, 其中 $A \subseteq X$

嵌入映射. $x \in A$, $i(x) = x \in X$

专门符号 $i: A \hookrightarrow X$ "$\hookrightarrow$"

identical map: $id_X: X \to X$

$id_X(x) = x$

$f: X \to Y$ 双射 $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ 逆.

交换图：

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow z=g(f(x))$$

$y=f(x)$ $\quad$ $z=g(y)$

$g\circ f \equiv g(f)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

交换图 $g\circ f$

等价~~关系~~ (equivalent)关系 $\backsim$

举例：$\theta[a]=\{a+n\pi \mid n\in Z\}$

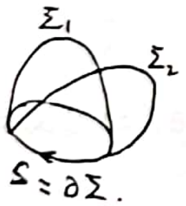
$R/\backsim \;=[0,\pi]$

实数域 扣除 所有等价类.

② Bloch 能带 $\quad |k|\le(\frac{\pi}{a})$ BZ or 第一BZ.（布里渊区）.

$k$ 与 $k+G$ 一样的/等价的

③ Stokes 定理。



$\Sigma_1-\Sigma_2=\Sigma$

$\partial(\Sigma_1-\Sigma_2)=\partial\Sigma_1-\partial\Sigma_2=0=\partial\Sigma$. 即$\Sigma$无边界.

$\langle\partial\Sigma_1, w\rangle=\langle\Sigma_1, dw\rangle$, $\langle\partial\Sigma_2, w\rangle=\langle\Sigma_2, dw\rangle$.

$\because \langle\partial\Sigma_1, w\rangle=\langle\partial\Sigma_2, w\rangle \Rightarrow \langle\Sigma_1, dw\rangle=\langle\Sigma_2, dw\rangle=\cdots=\langle\Sigma_n, dw\rangle$

$\Rightarrow [\Sigma_1]=\{\Sigma_1+\Sigma \mid \partial\Sigma=0\}$

④ 磁场中的规范势.

$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\phi$

$\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\vec{A}'=\vec{B}$ 可测量.

等价关系的定义:

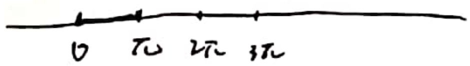
$$\begin{cases} 1.\ a \backsim a \\ 2.\ a \backsim b \Rightarrow b \backsim a \\ 3.\ a \backsim b,\ b \backsim c \Rightarrow a \backsim c. \end{cases} \Leftrightarrow [a] = \{x \in X \mid x \backsim a\}$$

商空间: Quotient space

$\{[x]\} = X/\backsim$ "除掉" (抹)

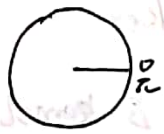
应用:

① $\mathbb{R}/\backsim = S^1$ or $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \sim [0, \pi]$




$[\alpha] = \{\alpha + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

1维布里渊区.



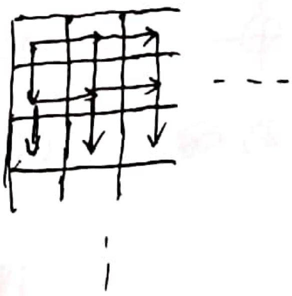

② 2维布里渊区

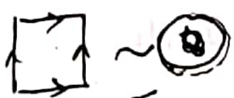
$(k_x, k_y) \backsim (k_x + 2\pi, k_y) \backsim (k_x, k_y + 2\pi)$

$= S^1 \times S^1$

↑

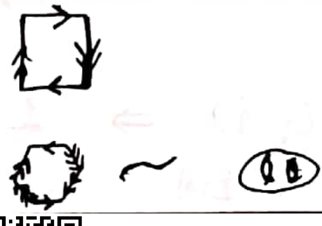
卡氏积





Torus

~~Kol~~Klein Bottle.



线性空间, & vector space

$V$ 线性空间 $\Rightarrow \forall v = v^i e_i$ $e_i$ 是基矢.

线性变换: $f: V \to V'$

$$f(av_1+bv_2) = af(v_1) + bf(v_2)$$

反线性变换: $K$: Complex conjugator.

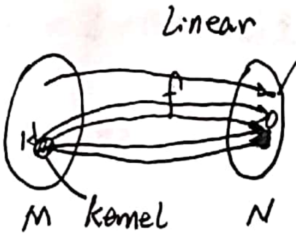
Linear mapping: $g: V \to \mathbb{R}$. 求值 $\Rightarrow g(v) \in \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ 从 $V$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有映射的集合

Homomorphism

$\langle u|v \rangle \in \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

Im & Ker

image & kernel




存在 $H$, $\forall h \in H$, 都有 $f(h)=0$

$y = f(x+h) = f(x) + f(h) = f(x)$

$f = \boxed{\quad\quad}$, $\underset{N_1 > N_2}{\boxed{N_1 \times N_2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_2} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\boxed{N_2 \times N_2} \boxed{0} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{N_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\dim(\mathrm{kernel}(f)) = N_1 - N_2$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = N_2 = \dim(N)$

$\dim(M) = N_1$

$\dim(N_1) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

---

回顾.

$\underbrace{L(q, \dot{q})}_{\text{切空间}} \Rightarrow L: Q \to \mathbb{R}$