行列式定义在微分形式中的应用

詹 毅 李 梦

(重庆工商大学 数学与统计学院 重庆 400067)

摘 要:微分形式中定义的外积运算形式上是多项式乘积。多项式乘积的结果是单项式乘积的和,每次参与乘积的单项式只能来自于一个多项式。多项式乘积性质和外积运算的反交换律使得微分形式的外积运算具有行列式的运算性质。运用行列式的定义可以更好的理解微分形式的外积运算。

关键词:行列式;微分形式;外积

【中图分类号】O178 【文献标识码】A 【文章编号】2095-2627(2017)24-0005-01

行列式的定义是线性代数中最基本的概念。外微分形式是微分几何中的重要内容,微分形式的外积是其中的最基本的概念和最基本的运算。两者之间有着极为紧密的联系,本文借助行列式定义这一简单易懂的概念理解微分形式中外积的定义与运算。以下的基本定义,包括行列式的定义,微分形式,微分形式的外积等等,都是线性代数,微分几何中最基本的概念,为了便于阅读,我们在这里再重新叙述一下。

一、基本知识

一个 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|_n$, $i,j = 1,2,\cdots,n$,定义为

定义 1[1]:n 阶行列式 $|A| =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,代数和的每一项都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列是带正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列是带负号。这一定义又可以写成:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

定义 2:设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 n 维向量空间 R^n 中的一组基底,i_p 在 1 至 n 中取值,$p = 1,2,\cdots,n$,以元素 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 为基底的实向量空间记为 V^p,它的元素具体可表示为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1i_2\cdots i_p}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},$$

进一步,2^n 维向量空间 $G(V):=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n$。在 $G(V)$ 中引入外积“(”,规定它满足结合律,分配律以及如下的反交换律:$e_i\wedge e_j = -e_j\wedge e_i$

注:由定义可知,$e_i\wedge e_i = 0$, $\forall i$.

二、行列式定义在外积和外微分中的运用

设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 R^n 中的一组向量,则 y_i 可以用 R^n 中的基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 表示为:$y_i = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$, $i=1,2,\cdots,n$,

现在我们考察外积 $y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n$ 运算。

由定义 2 可知,上述外积的运算与多项式运算(普通乘积)是相同的(外积运算不满足交换律,但满足反交换律),两个乘积的结果是一个代数和,其每一项是从每个 y_i 中选一项相乘。如果我们把每个 y_i 看作一行,那么外积就可以看作是不同行不同列的元素 $a_{ij}e_j$ 的乘积(相同列的含有相同基底元素 e,外积为0)。如果把指标 j 按从小到大的排列,由外积的反交换律 e_i(e_j = (e_j(e_i可得,e_i, e_j 交换一次符号就改变一次。因此,可以看出上述向量的外积与行列式的运算是完全相同的,从而可得

$$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$$

若 $p < n$,这时只有 p 个向量参与外乘,把每个向量看作一个多项式。按照多项式乘法,p 个“多项式”外乘的结果就是每次从一个向量中取出一项(一共 p 项)相乘,就相当于从 n 维向量中取出一个 p 维子向量,然后外积。由上面的结果不难得出下面的推论:

推论 1[2]:

$$y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_p = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n}\begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

推论 2:设 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) = \varphi(y) = (\varphi_1(y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots,\varphi_n(y_1,y_2,\cdots,y_n))$ 是 R^n 上的一个变换,则有

$$d\varphi_1\wedge d\varphi_2\wedge\cdots\wedge d\varphi_n = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_j}dy_j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_j}dy_j\right)$$

$$=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots y_n)}dy_1\wedge dy_2\wedge\cdots\wedge dy_n$$

从上面可以看出,外微分形式的外积本质上就是多项式乘法,其满足反交换律,结合律和分配律,特别是反交换律的性质使得其运算具有行列式相同的运算性质。我们可以完全把外积运算看作是行列式的运算看待,从而熟练的掌握微分形式的外积运算。

参考文献:

[1] 王萼芳,石生明,高等代数(第三版),高等教育出版社,2003

[2.] 梅向明,黄敬之,微分几何,高等教育出版社,1988

基金项目:重庆工商大学高等教育教学改革研究项目(2017222),重庆工商大学 2017 课程改革建设项目

作者简介:詹毅(1971.1—),男,重庆万州人,博士学历,重庆工商大学数学与统计学院,偏微分方程图像处理方向。李梦(1973.4—),女,四川开江人,博士学历,重庆工商大学数学与统计学院,偏微分方程图像处理方向。

享受教工的待遇;学校每年举办迎新年文艺汇演的舞台,义工们和老师、学生同台演出;庆六一活动中义工们和学生一起欢声笑语;马拉松拉拉队比赛中全体义工总动员,各自发动全家、全厂、全店员工为我校投票,支持我校拉拉队比赛;定期举行登山、真人野战赛等亲子游戏活动等等,家长义工们已经把金尚中学当成了自己的“家”,俗话说“亲其师,信其道”,家长们与学生拉近了距离,不再是高高在上的家长,也不再是唠唠叨叨的家长,而是金尚中学的一份子,是学生爱聊天的对象,是学生心目中的“辅导员”。

三、家长义工队防治校园周边校园欺凌的七大优势

1. 实现自我价值

大部分的义工妈妈是家庭妇女,没有职业妇女的工作成就,在义工队里,她们体验到了成功的喜悦和成就感及自我价值的实现,她们愿意承担这份义务工作。

2. 陪着孩子一起成长

家长义工到校当义工,可以随时与班主任、科任老师沟通,交流孩子在校表现及学习情况,可以零距离的关心孩子。义工队常态性的组织义工亲子活动,如登山、野战、旅行等,在活动中有利于融洽亲子关系消除亲子间隔阂,改善亲子关系,陪伴孩子一起成长。义工的孩子不会出现校园欺凌的现象,从另一个角度来看,也减少了校园欺凌现象的发生。

3. 提高家庭教育水平

通过常态化开展义工家庭教育培训活动以及家长义之间相互交流等方式,提高了家长义工教育孩子的水平,保证了自己孩子的健康成长,同时,也通过家长义工进一步带动其它家长,共同提高教育孩子的素质,减少了问题孩子的出现,也减少了校园欺凌现象的发生。

4. 理解老师工作

义工力所能及帮助老师做一些“杂事”,如督促课代表收集作业、早读管理、午休管理、课间管理、食堂管理等,让繁忙的老师能够有更多的时间和精力专注于教育教学,也更能理解学校工作客观上困难,理解老师工作的繁忙和无奈,少了抱怨与指责,多了信任、理解、宽容,家校关系的融洽和谐,提升教育教学效果,减少问题孩子的出现,优化学校的校风,校风好,校园欺凌现象就不容易发生。

5. 协助转化问题学生

协助转化问题学生是义工队的一个工作内容,他们有时间有精力,更重要的是他们以家长义工的身份来转化问题学生,往往更有效果,问题学生需要更多的耐心和关爱,义工的角色也让跟老师、家长已经对立的问题学生跟容易接受,有效提高了转化率。还有,每个问题学生的背后往往有一个问题家庭,由义工出面和这些问题学生的家长更容易交流,起到更好的转化效果,问题学生转化工作做好了,校园欺凌现象当然就少了。

6. 构建义工、学校、社区、警察联动制度

由学校牵头,搭建学校、义工、社区、警察联动的工作平台。

一是成立工作小组,具体成员由四部分组成,学校有分管德育的副校长、德育处、安保办参加,派出所有综治副校长及社区警察参加,家长义工队设立校外工作组,组长一人,成员若干人,社区有分管教育副主任,安保人员。二是“四定巡逻制度”:定人、定期、定点、定时在校外巡逻。三是责任分明。学校承担学生的教育处理工作,警察有执法权,只要有校外青年或不法分子介入,由警察出面处理,社区协助周边的整治工作和社区居民的思想工作,而家长义工发挥更大的作用,他们定人、定期、定点、定时在校外巡逻,让校园欺凌没有发生的时间和空间,他们发现学生问题,可以及时处理,处理不了,和学校联系,学校马上派人处理,他们发现有校外青年参加,及时与综治副校长联系,警察马上到场处理,他们与校园周边的一些奶茶室、网吧建立友好关系,一发现学生私自进入,马上电话通知,学校和家长义工马上到场处理。四是效果凸显。由于构建学校、义工、社区、警察联动的工作平台,净化了校园周边的风气,这几年,学校没有发生校外打架斗殴现象等校园欺凌现象,这里面,家长义工队起了最大的作用。

7. 形成品牌,发挥辐谢作用

学校义工队在区、市教育局的大力支持关心下,在学校、社区、家长的共同努力下,形成了独具特色的家校工作品牌,引起了全国各地中小学校的关注,到学校来参观取经者络绎不绝,学校每年迎接来自全国各地的观者近千人,厦门本地中小幼部分学校参照我校义工队的做法成立家族义工队或家长志愿者队伍,充分发挥了我校家长义工队的品牌价值。《厦门日报》《海西晨报》《福建日报》《中国德育》等媒体介绍我校家长义工队的成功经验报道,大大提升了学校的知名度和家长义工队工作价值。