DOI:10.13804/j.cnki.2095-6991.2011.03.033
第25卷第3期　　甘肃联合大学学报(自然科学版)　　Vol.25 No.3
2011年5月　　Journal of Gansu Lianhe University (Natural Sciences)　　May. 2011

文章编号: 1672-691X(2011)03-0080-04

外积与外微分运算及其应用

刁光成
(山西水利职业技术学院, 山西 运城 044004)

摘　要: 简要介绍了微分几何的发展和外微分在微分流形中的重要性, 着重讨论向量代数与外积运算的相关性, 探讨向量分析与外微分的关系, 并得到了多种常用运算公式的外微分表示, 最后从外微分角度, 对数学分析中四大基本公式(莱布尼兹公式、斯托克斯公式、格林公式、高斯公式)作了统一表述.

关键词: 外积; 外微分; 微分流形; 四大公式
中图分类号: O172　　　文献标识码: B

引言

微分几何是数学中一门历史悠久的学科. 最初它只是以微积分应用的面貌在几何上出现, 但随着它的发展和推广, 微分几何已不再局限于只研究流形的邻近点, 而是具有整体性质, 并成为当代热门的学科之一——现代微分几何学[1]. 其主要内容是以分析方法来研究空间的几何性质. 现代微分几何学所研究的对象是微分流形, 其上还配有附加的结构. 例如, 微分流形上引进黎曼度量、洛伦茨度量、辛尺度这些结构后, 就分别成为黎曼流形、洛伦茨流形和辛流形, 相应地也就丰富了几何内容. 微分流形上的外微分形式是一个微分几何量, 对它可进行外微分运算, 这在几何上十分重要[2]. 外微分的出现可以说标志着微积分从古典走向现代. 外微分形式理论与方法是研究现代微分几何的重要工具, 外代数的发展, 尤其是外积与外微分的发展, 不仅对积分公式进行了简化, 同时也为气体热力学公式的研究提供了便利. 借助外微分, 可以用更为简洁的公式描述物理规律, 能够非常容易地理解力学概念. 为此本文浅易地介绍现代微分几何中的一种较新的数学方法——外微分形式及其运算, 并简述它们在几何学中的一些应用.

微分的外积运算

微分的外积定义[3]　对三维空间中自变量的微分 dx, dy, dz, 其外积运算用 $\wedge$ 表示, 如 dx 与 dy 的外积记为 $dx\wedge dy$, 它们满足以下运算法则:

(1) $(a dx)\wedge dy=a(dx\wedge dy)$ (a 是实数);

(2) 外积运算对加法有分配律, 如 $dx\wedge(dy+dz)=dx\wedge dy+dx\wedge dz$;

(3) 反交换律, 即任何两个微分的外积交换次序后变号, 如 $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$;

(4) 任意一个微分与自身的外积等于0, 如 $dx\wedge dx=0$;

(5) 结合律, $dx\wedge(dy\wedge dz)=(dx\wedge dy)\wedge dz$.

dx, dy, dz 在几何上可以理解为有向长度微元. $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$ 在几何上可以理解为有向面积微元, $dx\wedge dy\wedge dz$ 在几何上可以理解为有向体积微元. 因此, 它们与 $dydz$, $dzdx$, $dxdy$, $dxdydz$ 的区别在于前者是有向度量, 即值有正负之分, 而后者是无向的, 永远是正的.

把微分的外积运算与向量的外积运算 $\vec{a}\times\vec{b}$ 相比较, 上述运算法则(1)~(4)是完全类似的. 而 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 在几何上是以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的面积, 对应于

$$|dy\wedge dz|=dydz,\quad |dz\wedge dx|=dzdx,\quad |dx\wedge dy|=dxdy.$$

三维空间中的外积、外微分运算

在三维欧氏空间中, 设函数 $f(x,y,z)$, $f_i(x,y,z)$ $(i=1,2,3)$ 在空间区域 V 上连续, 定义下面的式子:

$\omega_0=f(x,y,z)$ 是一个零阶外微分形式;

$\omega_1=a(x,y,z)dx+b(x,y,z)dy+c(x,y,z)dz$ 是一个一阶外微分形式;

$\omega_2=A(x,y,z)dx\wedge dy+B(x,y,z)dy\wedge dz+$

收稿日期: 2011-02-25.
作者简介: 刁光成(1980-), 男, 河北辛集人, 山西水利职业技术学院讲师, 硕士, 主要从事微分几何研究.

$C(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 是一个二阶外微分形式；

$\omega_3=F(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 是一个三阶外微分形式；

同理定义 ω_k 为 k 阶外微分形式.

其中，ω_0，ω_1，ω_2 和 ω_3 分别具有零阶、一阶、二阶和三阶外微分形式. 若再假设空间区域 V 上所涉及到的函数皆可微，则外微分运算如下：

$\mathrm{d}\omega_0=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z$，

$\mathrm{d}\omega_1=(b_x-a_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(c_y-b_z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(a_z-c_x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$，

$\mathrm{d}\omega_2=(A_z+B_x+C_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，

$\mathrm{d}\omega_3=0$.

可见，零阶外微分式求外微分得一阶外微分形式；一阶外微分形式求外微分得二阶外微分形式；二阶外微分形式求外微分得三阶外微分形式；三阶外微分形式求外微分后为零[4].

同理可推广到更高维（n 维）的欧式空间中去，每一个 k 阶外微分形式（$k<n$）的外微分是一个（$k+1$）阶外微分形式，而一个 n 阶形式的外微分则是 0.

向量代数和外积运算

我们已经简要介绍了外积、外微分和相关性质，现在就可以用外积和外微分形式来表示各种我们所熟悉常用的运算公式了.

在三维空间中我们取一静止坐标系 $\{O-xyz\}$，其中有任一向量 $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$，其中 A_x，A_y，A_z 分别为 $\vec{A}$ 在 x，y，z 轴上的分量，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 为单位矢量[5].

首先，必须介绍关于向量的外微分形式的表示. 于是我们将上式中的 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别换成 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$. 这样得到的就是与向量 $\vec{A}$ 相对应的一次外微分形式，并用符号 $\omega^1_{\vec{A}}$ 表示，即

$$\omega^1_{\vec{A}}=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z.$$

类推可得二次外微分形式，即

$$\omega^2_{\vec{A}}=A_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+A_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+A_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

这样，根据具体情况需要，向量 $\vec{A}$ 可分别表示为 $\omega^1_{\vec{A}}$ 或 $\omega^2_{\vec{A}}$.

有了关于向量的外微分形式的表达式，并通过外积运算我们就可分别导出用外微分形式表示的向量代数中的加法、标积和矢积等公式了.

不难看出向量 $\vec{A}$，$\vec{B}$ 之和的外微分形式表达式是与 $\vec{A}+\vec{B}$ 相对应的一次形式：

$$\omega^1_{\vec{A}+\vec{B}}=(A_x+B_x)\mathrm{d}x+(A_y+B_y)\mathrm{d}y+(A_z+B_z)\mathrm{d}z,$$

即

$$\omega^1_{\vec{A}+\vec{B}}=\omega^1_{\vec{A}}+\omega^1_{\vec{B}}.$$

同理也可得到相应的二次形式

$$\omega^2_{\vec{A}+\vec{B}}=\omega^2_{\vec{A}}+\omega^2_{\vec{B}}.$$

如 K 为常数，对于 $K\vec{A}$ 很明显就有相应的一次形式和二次形式，它们分别为

$$\omega^1_{K\vec{A}}=K\omega^1_{\vec{A}},\ \omega^2_{K\vec{A}}=K\omega^2_{\vec{A}}.$$

接着，我们进一步来求外积运算与矢积和标积的关系. 利用外积具有分配律，且由 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$，我们分别对 $\omega^1_{\vec{A}}$ 和 $\omega^1_{\vec{B}}$ 以及 $\omega^2_{\vec{B}}$ 进行外积，有

$$\omega^1_{\vec{A}}\wedge\omega^1_{\vec{B}}=(A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z)\wedge(B_x\mathrm{d}x+B_y\mathrm{d}y+B_z\mathrm{d}z).$$

由矢积定义，上式不难得到结果

$$\omega^1_{\vec{A}}\wedge\omega^1_{\vec{B}}=\omega^2_{\vec{A}\vec{B}}.$$

同理有

$$\omega^1_{\vec{A}}\wedge\omega^2_{\vec{B}}=\vec{A}\circ\vec{B}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\omega^3_{\vec{A}\vec{B}}.$$

可见，外微分形式的外积运算是与向量代数密切相关的.

外微分和向量分析的关系

现在讨论当向量 $\vec{A}$ 形成向量场 $\vec{A}(x,y,z)$，并经过外微分运算后，又将会得到怎样的结果呢？需要注意的是由于向量 $\vec{A}$ 形成了向量场 $\vec{A}(x,y,z)$，所以在 $\omega^1_{\vec{A}}$ 式中的 A_x，A_y，A_z 也就不再是常数而应是函数 $A_x(x,y,z)$，$A_y(x,y,z)$，$A_z(x,y,z)$ 了. 现在我们对向量场 $\vec{A}(x,y,z)$ 对应的一次形式 $\omega^1_{\vec{A}}$ 进行外微分运算[6]，即

$$\mathrm{d}\omega^1_{\vec{A}}=\mathrm{d}[A_x(x,y,z)\mathrm{d}x+A_y(x,y,z)\mathrm{d}y+A_z(x,y,z)\mathrm{d}z].$$

按照上面介绍的外微分运算法则并引用 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^1_{\vec{A}}=&\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+\\&\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y+\\&\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z=\\&\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\\&\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

我们发现这三个括号内就是向量场 $\vec{A}(x,y,z)$ 旋度 rot 的三个分量，于是得到

$$\mathrm{d}\omega_{\vec{A}}^{1}=\omega_{\mathrm{rot}\vec{A}}^{2}.$$

此式说明对向量场 $\vec{A}$ 的一次形式取外微分等于该向量场 $\vec{A}$ 旋度所对应的二次形式. 同样地, 用类似方法我们可以得到

$$\mathrm{d}\omega_{\vec{A}}^{2}=\mathrm{d}[A_x(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+A_y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+A_z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y]=\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

显然式中 $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ 各项是向量场 $\vec{A}(x,y,z)$ 散度 div 的三个分量, 于是有

$$\mathrm{d}\omega_{\vec{A}}^{2}=(\mathrm{div}\vec{A})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\omega_{\mathrm{div}\vec{A}}^{3}.$$

此式说明对向量场 $\vec{A}$ 的二次形式取外微分等于与该向量场 $\vec{A}$ 散度相对应的三次形式.

根据以上的分析及得到的结果, 可见外微分与向量分析相联系的关系是如此地协调和默契, 同时也清楚看到由外微分所表示的向量分析中有关梯度、旋度和散度的表示是如此的简洁.

牛顿—莱布尼兹公式、斯托克斯公式、格林公式、高斯公式的统一描述

在数学分析中我们曾研究过著名的牛顿—莱布尼兹公式、斯托克斯公式、格林公式、高斯公式[7], 这四个公式在积分学里起了非常重要的作用, 它们分布在不同的章节, 又解决了不同的积分问题, 看起来好象彼此孤立, 实质不然, 笔者利用外积、外微分把这四个公式概括、统一起来.

牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b,$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

若记 $\lambda=F(x)$, 则 $\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}F(x)$, 则牛顿—莱布尼兹公式可写为

$$\int_{[a,b]}\mathrm{d}\lambda=\int_{\{a,b\}}\lambda.$$

斯托克斯公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

或

$$\oint_L(P,Q,R)\circ\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}=\iint_S\mathrm{rot}\{P,Q,R\}\circ\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}.$$

其中 S 是以分段光滑曲线 L 为边界的光滑曲面, L 与 S 的方向遵从右手法则.

在这个公式中, 由于 L 与 S 都是有向的, 故 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 是有向长度微元, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是有向面积微元, 若记 $\lambda=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$, 则

$$\mathrm{d}\lambda=\mathrm{rot}\{P,Q,R\}\circ\{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\},$$

故斯托克斯公式可写为

$$\oint_L\lambda=\iint_S\mathrm{d}\lambda.$$

格林公式作为斯托克斯公式的特殊情形, 自然也具有上述形式.

高斯公式

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

或

$$\oiint_S\{P,Q,R\}\circ\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}=\iiint_V\mathrm{div}\{P,Q,R\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中空间闭区域 V 以分片光滑曲面 S 为边界, 曲面 S 取外侧.

在这个公式中, 由于 S 是有向的, 故 V 也可看作有向的. 若记

$$\lambda=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}\lambda=\mathrm{div}\{P,Q,R\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

故高斯公式可写为

$$\oiint_S\lambda=\iiint_V\mathrm{d}\lambda.$$

综合上述, 可以将上述各公式统一为

$$\int_{\partial M}\lambda=\int_M\mathrm{d}\lambda,$$

其中, M 是 k $(k=1,2,3)$ 维区域, 而 ∂M 是 M 的边界(因而是 $k-1$ 维的), λ 是 $k-1$ 阶外微分(因而 $\mathrm{d}\lambda$ 是 k 阶外微分).

这段教学内容, 是在数学分析的最后阶段讲述的. 现在利用外微分形式及其运算, 较方便的将数学分析中的四个基本公式: 牛顿—莱布尼兹公式、格林公式、奥氏公式和斯托克斯公式高度概括, 并加强了微积分之间的联系, 最后统一成一个公式, 便于理解和掌握.

6 结论

外微分形式理论与方法是研究现代微分几何的重要工具，它在数学的其他分支以及物理、力学中也有广泛的应用，针对各种应用和研究所提出的问题，外形式和外微分式的理论也得到了充分的发展．现代微分几何学必将在数学、物理学领域及分析学范畴内发挥更大、更重要的作用。

参考文献：

[1] 陈省身，陈维桓．微分几何讲义[M]．北京：北京大学出版社，1983.
[2] 陈维桓．微分流形初步[M]．北京：高等教育出版社，2006.
[3] 黄正中．微分几何导引[M]．南京：南京大学出版社，1992.
[4] 莫绍揆．试论微分的本质[J]．南京大学学报：自然科学版，1994，30(3)：390-402.
[5] 孙清华．积分定理的微分形式[J]．武汉纺织工学院学报，1998，12(4)：30-33.
[6] 班书昊，李晓艳．外积与外微分的性质研究及其应用[J]．江苏工业学院学报，2005，17(1)：55-57.
[7] 李绍宽．外代数与外微分的若干性质及其应用[J]．纺织高校基础科学学报，2000，13(4)：300-302.

The Product and the Differential Operation and Its Application

DIAO Guang-cheng
(Shanxi Water Technics Professional College, Yuncheng 044004, China)

Abstract: In this paper, the development of differential geometry and the differential in differential manifolds were briefly introduced, the importance and the vector algebra accumulate computation were discussed, the relevance vector analysis and outer differential relationship were also discussed, several common operational formulas of the differential said were obtained. Based on the outside differential angle, the mathematical analysis four basic formula (Leibnitz formula, stokes formula, green formula, gaussian formula) to have the unification expression were presented.

Key words: the product; the differential; differential manifolds; four formula