<<微积分五讲>> 龚昇

目的：
- 概念，
- 计算
- 应用
- 数学（线性代数，微分几何，同伦群，同调群）。

Goldstone 定理
非厄米拓扑物理

内容：EM（电磁场）（网页，（N. Yang, Phys. Today 2004）。
名人传记（陈省身，杨振宁…）。

Monopole. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow$ Real Space.

⇒分类. ⇒群.

Topo Insulator. ⇒ k → space.

Topo Defect（拓扑性质，电极化 / 液晶）。
晶错 ⇒ Thouless.

Refs:

1. <<规范场、纤维丛和弦>>

2. <<Topo Insulator>> (H.K.U. Shouqing Shen)

3. <<Topo Insulator & Topo S.C. >> (Bernevig).
BHZ modle.
最早预言 Topo Insulator
(2005-2006)

4. <<Nakahara Topo Geometry & Phys. >>

5. RMP, <<Cond' matt' Feild Theory >> 第9章. Topology.

6. 数学书

7. Wiki & 知乎.

扫描全能王 创建

考核：$\frac{1}{3}$ 作业，$\frac{1}{3}$ 考试，$\frac{1}{3}$ Project（阅读 ≥20页文章，~~Latex~~，读书报告，用Latex写）
（开卷，选4）

要求：操作 matlab/mathematica.

开始：主图象：

$$\begin{cases} H_K = \\ H_{TB} = F.T. \end{cases}$$

H_K 函数.

$H_k : k \longrightarrow$ 空间 mapping

$H : k \rightarrow$ Hrebert Space.

or $f : X \rightarrow Y$.

$\psi_k \Rightarrow \psi : k \rightarrow$ Vector Space.

Fibre Bundle.

$\vec{A}$（矢势）$\longrightarrow$ Connection

$\vec{B}$（磁场）$\longrightarrow$ Curvature.

1. $dxdy$ 微元面积. $[dxdy] \sim m^2$

$dxdy = J\, dx'dy'$

乘法 $(\cdot, X)$ $\Rightarrow$ wedge $\wedge$

$\Rightarrow$ 高维积分 $\wedge$

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = a_{11}dx' + a_{12}dy' \\ dy = a_{21}dx' + a_{22}dy' \end{cases}$$

$$\Rightarrow dxdy = a_{11}a_{21}dx'dx' + a_{11}a_{22}dx'dy' + a_{12}a_{21}dy'dx' + a_{12}a_{22}dy'dy' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} dx'dy'$$

$\Rightarrow$ $dxdy$ (乘) 满足：① $dx'dx' = dy'dy' = 0$，② $dx'dy' = -dy'dx'$

$\Rightarrow$ 不是点乘

叉乘量间不对.

$\Rightarrow$ 第一个引入 $\wedge$：

特点：
$$\begin{cases} dx\wedge dx = 0 \\ dx\wedge dy = -dy\wedge dz \\ (dx\wedge dy)\wedge dz = dx\wedge(dy\wedge dz) \end{cases}$$

结合律.

第二个引入 forms (形式)

1-form $w = \sum_i f_i dx_i$ $\leftarrow$ $\lambda^1 \Rightarrow$ 线积分

2-form $w = \sum_{ij} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ $\leftarrow$ $\lambda^2 \Rightarrow$ 面积分

3-form $w = \sum_{ijk} f_{ijk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ $\leftarrow$ $\lambda^3 \Rightarrow$ 体积分

物理：

统计物理：

$dU = PdV - Tds + \mu dN$

经典力学：

$H = H(p, q)$

$dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq$

λ^2：$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint B_x dydz + B_y dzdx + B_z dxdy$.

λ^3：$\oint \phi\, dxdydz = \oint \phi\, dV$

第三：Stokes 定理.

文献导："古典微积分的最高峰."

(X.S. Chen)

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$I = \oint Pdx + Qdy + Rdz = \cancel{\iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy}$

$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$

$r = \partial S$

曲线是曲面边缘

$w = Pdx + Qdy + Rdz \Rightarrow dw = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$. $\cancel{\frac{\partial P}{\partial x} dx}$

$\cancel{dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx}$ $\underset{\uparrow \atop P(x,y,z)}{dP} = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$, $dQ = \cdots$, $dR = \cdots$

$$\int_S Pdxdy + Qdydz + Rdzdx = \int_{\partial\Sigma} w = \int_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right) dxdydz$$

$\partial\Sigma$ 体边界是面.

$$\vec{E} = \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

$$\nabla^2\phi = \rho \; \cancel{=} \; \frac{Q}{\varepsilon_0 V_{总}}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint \phi_z dxdy + \phi_x dydz + \phi_y dxdz \; \cancel{= \oint (\phi_x + \phi_y + \phi_z) dxdydz}$$

$$= \oint \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}\right) dxdydz = \oint (\nabla\cdot\vec{E}) dxdydz$$

$$= \oint \nabla^2\phi \, dxdydz$$

$$= \oint \rho \, dxdydz$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\boxed{\int_{\partial M} w = \int_M dw}$ 失效的两种情况：{ 复变函数存奇点情况. / 磁单极子

$\Rightarrow$ 要求光滑

$\langle \partial M, w \rangle = \langle M, dw \rangle$

局部 整体.

一个边界存无数个曲面对应。

Topo 是什么?

~~保持~~ 纹争 距离
保留 相邻.

复习.

1) $dx \wedge dy \Rightarrow dxdy \quad \Rightarrow$ 推广 $dx \wedge dy \wedge dz$.

统一 Jacobi 行列式

中文文献：① 热力学

② $df = udx + vdy \Rightarrow d(df) = 0$

③ ……