多变量微积分期末复习

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

主要内容

- 曲线积分和曲面积分
  (1) 第一型曲线积分
  (2) 第一型曲面积分
  (3) 第二型曲线积分
  (4) 第二型曲面积分
  (5) Gauss定理和Stokes定理
  (6) 保守场
- Fourier分析
  (1) Fourier级数
  (2) Fourier变换
- 反常积分和含参变量的积分

第一型曲线积分

1. $\int\limits_L (2x+y)^5 \mathrm{d}s$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.

2. $\int\limits_L (x^2 + x\cos x)\mathrm{d}s$, L 为单位圆周$x^2+y^2=1$.

3. $\int\limits_L z^2 \mathrm{d}s$, L 为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

答案:

1.$\frac{33+63\sqrt{2}}{6}$.   2.π.   3.$\frac{2}{3}\pi a^3$.

第一型曲线积分

1. $\int\limits_L (2x+y)^5 \mathrm{d}s$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.

2. $\int\limits_L (x^2+x\cos x)\mathrm{d}s$, L 为单位圆周$x^2+y^2=1$.

3. $\int\limits_L z^2\mathrm{d}s$, L 为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

答案:

1.$\frac{33+63\sqrt{2}}{6}$. 2.π. 3.$\frac{2}{3}\pi a^3$.

第一型曲线积分

4. $\int\limits_L xy\mathrm{d}s$, L由$A(0,1,1)$到$B(1,0,1)$直线段, B到$C(1,1,0)$直线段, 以$(1,1,1)$为圆心, 1为半径,自C到A的四分之一圆弧组成.
5. $\int\limits_L (x+y+z)ds$,其中 L 是由直线段 AB $(A(2,2,0), B(2,0,0))$和螺旋线 BC : $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$ 组成.

答案:

4. $\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}-1$; 5. $6+2\sqrt{5}\pi^2$

第一型曲线积分

4. $\int_L xy\mathrm{d}s$, L由$A(0,1,1)$到$B(1,0,1)$直线段, B到$C(1,1,0)$直线段, 以$(1,1,1)$为圆心, 1为半径,自C到A的四分之一圆弧组成.
5. $\int_L (x+y+z)ds$,其中 L 是由直线段 AB $(A(2,2,0),B(2,0,0))$和螺旋线 BC : $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ t\in[0,2\pi]$ 组成.

答案:

4. $\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}-1$; 5. $6+2\sqrt{5}\pi^2$

第一型曲面积分

1. $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
2. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
3. 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.

答案:

1.3π. 2.$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. 3.$V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$.

第一型曲面积分

1. $\iint\limits_{S} z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
2. $\iint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
3. 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.

答案:

1.3π. 2.$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. 3.$V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$.

曲线积分和曲面积分

第一型曲面积分

4. $\iint\limits_{S} x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.
5. 求曲面S的面积，其中S是曲面$x^2+y^2+z^2=2Rz$ 在$z^2\geq 3x^2+3y^2$内的部分.
6. 若曲面S的球坐标参数表示为$x=r(\theta)\sin\theta\cos\varphi$, $y=r(\theta)\sin\theta\sin\varphi$, $z=r(\theta)\cos\theta$,$(\theta,\varphi)\in D$, $r\in C^1$, 求证:曲面S的面积为$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{r^2+r'^2}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 并由此求出曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ $(a>0)$的面积.

答案：

4. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$. 5. πR^2. 6. $2\sqrt{2}\pi a^2$.

第一型曲面积分

4. $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.
5. 求曲面S的面积，其中S是曲面$x^2+y^2+z^2=2Rz$ 在$z^2\geq 3x^2+3y^2$内的部分.
6. 若曲面S的球坐标参数表示为$x=r(\theta)\sin\theta\cos\varphi$, $y=r(\theta)\sin\theta\sin\varphi$, $z=r(\theta)\cos\theta$,$(\theta,\varphi)\in D$, $r\in C^1$，求证:曲面S的面积为$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{r^2+r'^2}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 并由此求出曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ $(a>0)$的面积.

答案:

4. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$. 5. πR^2. 6. $2\sqrt{2}\pi a^2$.

第一型曲面积分

7. 设点P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若曲面S在P点处的切平面 Π 与xoy平面垂直，

(1) 求点P的轨迹曲线Γ;

(2) 计算第一型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$,其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$\Gamma$上方的部分.

答案：

7. $\Gamma:\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1$; 2π.

第一型曲面积分

7. 设点P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若曲面S在P点处的切平面 Π 与xoy平面垂直，

(1) 求点P的轨迹曲线Γ；

(2) 计算第一型曲面积分$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$\Gamma$上方的部分.

答案：

7. $\Gamma:\ x^2+\frac{3}{4}y^2=1$; 2π.

Green公式

- 计算曲线积分 $I = \int\limits_C (xe^x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\,\mathrm{d}y$, 其中积分曲线 C 分别是:
  (1) 正向圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;
  (2) 从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(2,3)$ 的任意分段光滑曲线.

答案

0; $\quad e^2 + 2e^{-1} - \cos 3 + 25.$

Green公式

- 计算曲线积分 $I = \int_C (xe^x + 3x^2 y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\,\mathrm{d}y$, 其中积分曲线 C 分别是:
  (1) 正向圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;
  (2) 从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(2,3)$ 的任意分段光滑曲线.

答案

0; $\quad e^2 + 2e^{-1} - \cos 3 + 25$.

Green公式

1. 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心, R为半径的圆周$(R>1)$, 取逆时针方向.

2. 计算曲线积分$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$ 取逆时针方向.

3. 设L为圆周曲线 $x^2+y^2=1$, 按逆时针方向, 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$.

答案

1. π; 2. -2π; 3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Green公式

1. 计算曲线积分$I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心, R为半径的圆周$(R>1)$, 取逆时针方向.

2. 计算曲线积分$I=\int_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$ 取逆时针方向.

3. 设L为圆周曲线 $x^2+y^2=1$, 按逆时针方向, 计算曲线积分$I=\oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$.

答案

1. π;　　2. -2π;　　3. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Green公式

4. 设函数$f(x,y)$是整个平面上具有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任意x,y,t，有$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$成立.
(1) 证明$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$.
(2) 设D是由圆周$L:\ x^2+y^2=4$所围成的区域，证明

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}l=\iint\limits_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. 已知$f(x)$是正值连续函数，曲线$L:\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，证明$\oint_L -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x+xf(y)\mathrm{d}y\geqslant 2\pi$.

Green公式

6. 设$f(x,y)$, $g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$上有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$，证明:在单位圆盘上存在一点$(\xi,\eta)$，使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

7. 设$\overline{D}$是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域，$u(x,y)\in C^{(2)}(\overline{D})$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,
(1) 试证: $\displaystyle\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$，其中$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$为$\overline{D}$内沿简单光滑闭曲线$L$上单位外法线方向上的方向导数;
(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时，$u(x,y)=A$(常数)，证明:
$u(x,y)\equiv A,\ (x,y)\in D$.

Green公式

8. 设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上，有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=0$，其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量，证明在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.
9. 设$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$，$D:\ x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求积分$\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$，其中$\mathbf{n}$为单位外法向.

答案

9. $\pi(1-e^{-1})$.

Green公式

8. 设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上，有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=0$，其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量，证明在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.

9. 设$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$，D：$x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求积分$\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$，其中$\mathbf{n}$为单位外法向.

答案

9. $\pi(1-e^{-1})$.

Stokes公式

1. $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$ 其中L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 和平面$x+y+z=0$的交线，L的方向与z 轴正向成右手系.
2. 计算曲线积分$\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z轴正向来看，C沿逆时针方向.

答案

1. $-2\sqrt{3}\pi a^2$; 2. -24.

Stokes公式

1. $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$ 其中L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 和平面$x+y+z=0$的交线，L的方向与z 轴正向成右手系.
2. 计算曲线积分$\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z轴正向来看，C沿逆时针方向.

答案

1. $-2\sqrt{3}\pi a^2$;　　2. -24.

Gauss公式

1. $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$, 法线方向朝上.(答案：$\frac{5}{3}\pi$)
2. $\iint\limits_{S^+} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$的下侧. (答案：$\frac{21}{10}\pi$)
3. 计算 $\iint\limits_{S}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为有向曲面$z=x^2+y^2$ $(0\leq z\leq 1)$, 其法向与z轴夹角为锐角.(答案：$-\frac{\pi}{2}$)
4. S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的下侧, 求 $\iint\limits_{S}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.(答案：$-\frac{116}{5}\pi$)

Gauss公式

5. 计算 $\iint\limits_{S^+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, S^+ 为光滑闭曲面的外侧, 且原点不在曲面S^+上.(答案: 4π)

6. 设向量场$\vec{v}(x,y,z) = (yz, zx, 2)$, 计算 $\iint\limits_{\Sigma^+} \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$, Σ^+ 为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$的上侧, $\vec{n}$是其上的朝上的单位法向.(答案: 2π)

7. $\iint\limits_{S^+} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geqslant 0, R>0)$的上侧.
(答案: $2\pi R^3 + \pi R^2$)

Gauss公式

8. $\displaystyle\iint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$的外侧.

(答案：1 (提示:本题难点在三重积分变量代换))

9. $\displaystyle I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 其中 Σ 是曲面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的外侧.

(答案：$0<a<1$时,$I=0$; $a>1$时, $I=2\pi$.)

势函数

1. 设$f(x)$, $g(y)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数, $f(0)=g(0)=1$, 且第二型曲线积分 $\displaystyle\int_{L_{AB}} yf(x)dx+(f(x)+zg(y))dy+g(y)dz$与路径无关, 求向量场$(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$的势函数.

2. 设$f(z)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数, $f(0)=0$, 且向量场$\overrightarrow{v}=(2xz,2yf(z),x^2+2y^2z-1)$是整个空间区域上的保守场, 求$\overrightarrow{v}$的势函数.

3. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数, $f(0)=1$, 且向量场$\overrightarrow{F}=(yf(x),f(x)+ze^y,e^y)$是整个空间区域上的保守场, 求向量场$\overrightarrow{F}$的势函数.

势函数

4. $\overrightarrow{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2}),(y>0,z>0)$是否是有势场？若是，请说明理由，并求它的一个势函数；若不是有势场，请证明.

5. 证明向量场 $\overrightarrow{F}=yz(2x+y+z)\overrightarrow{i}+zx(x+2y+z)\overrightarrow{j}+xy(x+y+2z)\overrightarrow{k}$是有势场，并求其势函数.

势函数

6. 已知可微向量场 $\mathbf{V}=(f(y,z),xz,xy)$，其中 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
   (1) 求函数 $f(y,z)$，使得 $\mathbf{V}$ 是有势场;
   (2) 当 $f(0,0)=0$ 时，求 $\mathbf{V}$ 的一个势函数 $u(x,y,z)$;
   (3) 求出上述势函数 $u(x,y,z)$ 在点 $M(1,1,1)$ 处方向导数的最大值和最小值.

答案

$f(y,z)=yz+C$, C为任意常数; $u(x,y,z)=xyz$; 最大值为$|\mathrm{grad}\ u|_M=|(1,1,1)|=\sqrt{3}$;最小值为$-|\mathrm{grad}\ u|_M=-\sqrt{3}$.

势函数

6. 已知可微向量场 $\mathbf{V}=(f(y,z),xz,xy)$，其中 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.
   (1) 求函数 $f(y,z)$，使得 $\mathbf{V}$ 是有势场;
   (2) 当 $f(0,0)=0$ 时，求 $\mathbf{V}$ 的一个势函数 $u(x,y,z)$;
   (3) 求出上述势函数 $u(x,y,z)$ 在点 $M(1,1,1)$ 处方向导数的最大值和最小值.

答案

$f(y,z)=yz+C$, C为任意常数; $u(x,y,z)=xyz$; 最大值为$|\text{grad }u|_M=|(1,1,1)|=\sqrt{3}$;最小值为$-|\text{grad }u|_M=-\sqrt{3}$.

曲线积分与路径无关

1. 证明曲线积分$\int_L (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - zx)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z$与路径无关；并求
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - zx)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z.$$
2. 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线L上，曲线积分$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = 0$.
(1) 求函数$\varphi(x)$. (2) 设C是绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x + \varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}$.

曲线积分与路径无关

3. 设函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，对任一围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线C^+，曲线积分$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$的值相同.

(1) 设L^+是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，证明：

$$\int_{L^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0;$$

(2) 求函数$\varphi(x)$;

(3) C^+是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，求$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

Fourier级数及数项级数和

1. 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且
$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$
求$f(x)$ 的Fourier 级数，并利用所得结果计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

答案

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx,\qquad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^3}{32},\frac{\pi^4}{96},\frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

1. 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

求$f(x)$ 的Fourier 级数，并利用所得结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

答案

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx,\qquad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^3}{32},\frac{\pi^4}{96},\frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

2. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$ 展开以2π 为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.
3. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$ 展开成余弦级数(讨论收敛性).

答案

2. $1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad \frac{\pi^2}{12},\frac{\pi^4}{90};$

3. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\ \ x\in[0,\pi]$

Fourier级数及数项级数和

2. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$ 展开以2π 为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.
3. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$ 展开成余弦级数(讨论收敛性).

答案

2. $1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad \dfrac{\pi^2}{12},\dfrac{\pi^4}{90};$

3. $\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\ x\in[0,\pi]$

Fourier级数及数项级数和

4. 设$f(x)$ 是以2 为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\le 2,\\ 3-x, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

1) 试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图，并将$f(x)$展开为Fourier 级数;

2) 试画出$f(x)$Fourier 级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图;

3) 求数项级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right),\qquad \frac{\pi^2}{8},\ \frac{\pi^2}{6}.$$

Fourier级数及数项级数和

4. 设$f(x)$ 是以2 为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\le 2,\\ 3-x, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

1) 试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图，并将$f(x)$展开为Fourier 级数;

2) 试画出$f(x)$Fourier 级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图;

3) 求数项级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right),\quad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6}.$$

Fourier级数及数项级数和

5. $f(x)$是以2为周期的周期函数，在$(-1,1]$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为Fourier 级数，并说明该Fourier级数的收敛性;

(2) 写出相应的Parseval 等式;

(3) 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right);\ \frac{\pi^4}{96},\ \frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

5. $f(x)$是以2为周期的周期函数，在$(-1,1]$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为$Fourier$ 级数，并说明该$Fourier$级数的收敛性;

(2) 写出相应的$Parseval$ 等式;

(3) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right);\ \frac{\pi^4}{96},\ \frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

6. 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$展开成2π 为周期的余弦级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le|x|<\pi.\end{cases}$
   试将$f(x)$ 展开以2π 为周期的Fourier 级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2};\qquad \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)x.$$

Fourier级数及数项级数和

6. 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$展开成2π 为周期的余弦级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le|x|<\pi.\end{cases}$
试将$f(x)$ 展开以2π 为周期的Fourier 级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2};\qquad \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)x.$$

Fourier级数

8. 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且满足α $(0<\alpha<1)$ 阶Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leq |x-y|^\alpha.$$

记a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 是$f(x)$ 的Fourier 系数. 求证:

$$|a_n|\leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha, \quad |b_n|\leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha.$$

Fourier变换

1. 求函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0, & others\end{cases}$ 的Fourier 变换.
2. 求函数$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\ge 0\\ e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的Fourier 变换.

答案

$\dfrac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}$; $F(\lambda)=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos\lambda x\mathrm{d}x=\dfrac{4}{4+\lambda^2}$.

Fourier变换

1. 求函数$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & others \end{cases}$ 的Fourier 变换.
2. 求函数$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ 的Fourier 变换.

答案

$$\frac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}; \quad F(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos\lambda x \mathrm{d}x = \frac{4}{4+\lambda^2}.$$

含参变量积分的性质

1. 计算 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$.
2. 设 $G(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x, F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，求 $G'(\alpha)$, $F'(\alpha)$.
3. $I(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{x^2+xu}\,dx$，求 $I'(0)$.

答案

1. $\dfrac{\pi}{4}$; 2. $G'(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$,

$F'(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha$. 3. $\frac{e-3}{2}$.

含参变量积分的性质

1. 计算 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$.
2. 设 $G(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x, F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 求 $G'(\alpha)$, $F'(\alpha)$.
3. $I(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{x^2+xu}\,dx$, 求 $I'(0)$.

答案

1. $\frac{\pi}{4}$; 2. $G'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$,

$F'(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha$. 3. $\frac{e-3}{2}$.

含参变量积分的性质

4. 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数，
$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx,$$ 求$F'(\alpha)$.

5. 设 $g(x)=\int_{2^x}^{\cos^3 x}(e^{-xt^2}+\cos(xt)^2)\ \mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 与 $g'(0)$.

答案

4. $F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\,dx-\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)$.

5. $g'(x)=-\int_{2^x}^{\cos^3 x}t^2(e^{-xt^2}+2x\sin(xt)^2)\mathrm{d}t-3\cos^2 x\sin x(e^{-x\cos^6 x}+\cos(x^2\cos^6 x))-2^x\ln 2(e^{-x4^x}+\cos(x^2 4^x))$; $g'(0)=-2\ln 2$.

含参变量积分的性质

4. 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数,

$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx,\ 求F'(\alpha).$$

5. 设 $g(x)=\int_{2^x}^{\cos^3 x}\left(e^{-xt^2}+\cos(xt)^2\right)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 与 $g'(0)$.

答案

4. $F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\left(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha)\right)dx-\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)$.

5. $g'(x)=$

$-\int_{2^x}^{\cos^3 x} t^2(e^{-xt^2}+2x\sin(xt)^2)\mathrm{d}t-3\cos^2 x\sin x(e^{-x\cos^6 x}+\cos(x^2\cos^6 x))-2^x\ln 2(e^{-x4^x}+\cos(x^2 4^x))$; $g'(0)=-2\ln 2$.

反常积分和含参变量的积分

利用含参变量积分性质计算积分

1. 计算$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x))\,dx, \quad (u>0)$.
2. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$，其中$\alpha>0$.
3. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$，其中$\alpha>0$.

答案

1. $\pi\ln\frac{u+1}{2}$;　2. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$;　3. $\pi\ln(1+\alpha)$.

利用含参变量积分性质计算积分

1. 计算$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\,dx,\quad (u>0)$.
2. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$，其中$\alpha>0$.
3. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$，其中$\alpha>0$.

答案

1. $\pi\ln\frac{u+1}{2}$;　　2. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$;　　3. $\pi\ln(1+\alpha)$.

利用几个重要积分计算积分

1. 利用 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.
2. 利用Euler积分计算 $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$, 其中 $\alpha > 0$.
3. 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^5}\, dx$.

答案

1. $\frac{\pi}{2}$;　2. $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$;　3. $\frac{\pi}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 4!}$.

利用几个重要积分计算积分

1. 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.
2. 利用Euler积分计算 $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$, 其中 $\alpha>0$.
3. 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(9+x^2)^5}\,dx$.

答案

1. $\frac{\pi}{2}$; 2. $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$; 3. $\frac{\pi}{2^5\cdot 3^3\cdot 4!}$.