2020春季学期《多变量微积分》期末考试参考答案

一、$(16=5+5+6分)$ 单位直角坐标系中，四面体四个顶点为$A(1,0,0),B(2,2,1),C(3,2,0),D(4,1,0)$.

(1) 求四面体$ABCD$的体积. (2) 求顶点A到面BCD的高所在直线 l 的方程.

(3) 求 l 绕z轴旋转一周所得曲面方程.

解：(1). 体积为：$V=|\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}|=|\frac{1}{6}(1,0,-1)\times(2,-1,-1)\cdot(1,2,1)|=$
$\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&-1&-1\\1&2&1\end{vmatrix}\right\|=\frac{2}{3}.$

(2).面BCD法向为$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-1,-1,-1)$，即为$l$ 的方向. 故l方程为：$x-1=y=z$.

(3).设曲面上点$P(x,y,z)$由l 上点 $M(t+1,t,t)$旋转得到，则由$\begin{cases}|OP|=|OM|\\ \overrightarrow{PM}\perp z轴\end{cases}$ 可

得：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=(t+1)^2+2t^2\\ z=t\end{cases}$. 消去$t$可得旋转面方程 $x^2+y^2-2z^2-2z-1=0$.

二、 (10分) $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中$\varphi(x,y)$在点$(0,0)$处的某邻域内连续.

证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

证明：“$\Rightarrow$”：由可微知偏导存在，即$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(0,0)$存在，故$\varphi(0,0)=0$.

“$\Leftarrow$”：若$\varphi(0,0)=0$，则易得$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=0=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}$，同时

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta,y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

故$f(x,y)$ 在点$(0,0)$处可微.

三、 $(16=6+10分)$ 二元函数 $z(x,y)=2x^2-y^2$.

(1). 求$z(x,y)$在$(1,1)$处的梯度和沿方向$\tau=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$的方向导数.

(2). 求$z(x,y)$在D上的最大、最小值，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$.

解：(1). $grad(z)|_{(1,1)}=(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})|_{(1,1)}=(4x,-2y)|_{(1,1)}=(4,-2)$; 沿方向$\tau=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$的方向导数为$\frac{\partial f}{\partial\tau}|_{(1,1)}=(4,-2)\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=2-\sqrt{3}$.

(1). 先求$z(x,y)$在D内部可能的极值点：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(0,0)$.

再求z在∂D上的极值点：令$w(x,y)=z(x,y)+\lambda(x^2+y^2-4)$， 由$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=0\\ \frac{\partial w}{\partial y}=0\\ \frac{\partial w}{\partial\lambda}=0\end{cases}\Rightarrow$
$(x,y)\in\{(0,\pm2),(\pm2,0)\}$

计算得$z(0,0)=0, z(0,\pm 2)=-4, z(\pm 2,0)=8$. 故$z$在$D$上最大值为8，最小值为-4.

四、$(14=7+7$分$)$ 计算重积分的值.

(1) $\iint\limits_{D}(x^2+4x+y^2)dxdy$，其中$D$为由曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成的区域.

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(|x|+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$，其中$\Omega=\{(x,y,z)\big|1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

解： (1). 由对称性，$4x$在D上的积分为零. 将曲线方程表示为极坐标形式：$r=a\sqrt{\cos 2\theta}$（不妨设$a>0$). 采用极坐标变换积分，得：

$$\iint\limits_{D}(x^2+4x+y^2)dxdy=\iint\limits_{\bar{D}}r^2\cdot rdrd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^3dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos^2 2\theta d\theta=\frac{\pi}{8}a^4.$$

(2). 由对称性，z在D上的积分为零，且$\iiint\limits_{\Omega}(|x|+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=8\iiint\limits_{\Omega'}xe^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$
$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2 r\sin\theta\cos\varphi e^{-r^2}r^2\sin\theta dr=8\cdot\frac{\pi}{2}\frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\pi(2e^{-1}-5e^{-4})$.

五、$(14=7+7$分$)$ 计算曲线和曲面积分.

(1) 设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi(x)$连续可导，且$\varphi(0)=0$，求$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

(2) $\iint_\Sigma\frac{xdydz+2ydzdx+3zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，正向指向曲面外侧.

解： (1) 若积分与路径无关，则$xy^2dx+y\varphi(x)dy$为全微分. 进而$\dfrac{\partial\big(y\varphi(x)\big)}{\partial x}=\dfrac{\partial\big(xy^2\big)}{\partial y}\Rightarrow\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=2x$. 解之得$\varphi(x)=x^2$. 且此时 $xy^2dx+y\varphi(x)dy=d\big(\frac{1}{2}x^2y^2\big)$. 故

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\dfrac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

(2). $\iint_\Sigma\frac{xdydz+2ydzdx+3zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint_\Sigma xdydz+2ydzdx+3zdxdy$
$=\iiint_V 6dxdydz-\iint_P xdydz+2ydzdx+3zdxdy=6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi+0=4\pi$.

六、(10分) $f(x)$在$[0,2\pi]$上可积且平方可积. 证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)(\pi-x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

其中$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\ dx(n\ge 1)$ 为$f(x)$延拓的Fourier系数.

证明： 对$\pi-x(0<x<2\pi)$以2π 为周期延拓后所得函数的Fourier系数为
$a_n'=0,\ b_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{2}{n}$. 故$\pi-x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sin nx(0<x<2\pi)$. 由推广形式的Parseval等式关系得：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)(\pi-x)dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_na_n'+b_nb_n')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

七、(10分) 已知$s>0$，求曲线$x^s+y^s=a^s(x>0,y>0)$与坐标轴围成的在第一象限的平面图形的面积.

解： $S=\int_0^a ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^{2/s}\theta d(a\sin^{2/s}\theta)=\frac{2a^2}{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1+\frac{2}{s}}\theta\sin^{\frac{2}{s}-1}\theta d\theta$

$=\frac{a^2}{s}\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{s}}t^{\frac{1}{s}-1}dt=\frac{a^2}{s}B(\frac{1}{s},\frac{1}{s}+1).$

八、$(10=6+4$分)

(1) 证明广义含参积分 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ 对$\forall\alpha$ 收敛；

(2) 化简，求$g(\alpha)$的初等表达式.

证明： (1)$x\to1+$时，$\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{\arctan\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$且$\int_1^a\frac{\arctan\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$收敛$(a>1)$; $x\to+\infty$时，$\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\sim\frac{1}{x^3}\cdot\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \alpha>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha<0\\ 0, & \alpha=0\end{cases}$ 且$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^3}$收敛. 故对任意$\alpha$，广义含参积分收敛.

(2). $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)'_\alpha\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}$. 而 $\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}\right|\leqslant\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\forall\alpha\in(-\infty,+\infty)$且$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$收敛，故$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)'_\alpha\mathrm{d}x$关于$\alpha$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. $g(\alpha)$的存在性，以及被积函数对参数导数的连续性显然成立. 故有：

$$\begin{aligned}g'(\alpha)&=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}\,(1+\alpha^2x^2)}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\alpha^2\sec^2t}\quad(x=\sec t)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2(1+u^2)}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\quad(u=\tan t)\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\end{aligned}$$

当$\alpha\geq0$时，$g(\alpha)=g(\alpha)-g(0)=\int_0^\alpha g'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^\alpha\left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\left(\alpha+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$

由对称性可得$g(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(|\alpha|+1-\sqrt{1+a^2}\right)\operatorname{sgn}\alpha\quad(-\infty<\alpha<+\infty)$.