往年期中考试答案

郑亚鹏

2022 年 4 月 23 日

1 2017-2018 年期中考试题

题 1

对 $\Phi(x,y,z)=0$ 两边求全微分:

$$\Phi_x(x,y,z)\mathrm{d}x+\Phi_y(x,y,z)\mathrm{d}y+\Phi_x(x,y,z)\mathrm{d}z=0,$$

可以得到:

$$\mathrm{d}x=-\frac{\Phi_y(x,y,z)}{\Phi_x(x,y,z)}\mathrm{d}y-\frac{\Phi_z(x,y,z)}{\Phi_x(x,y,z)}\mathrm{d}z$$

因此:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\Phi_y(x,y,z)}{\Phi_x(x,y,z)}$$

同理:

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\Phi_z(x,y,z)}{\Phi_y(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x(x,y,z)}{\Phi_z(x,y,z)}$$

故

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

题 2

对方程 $F(x-ay,z-by)=0$ 两边求全微分:

$$F_1\cdot(\mathrm{d}x-a\mathrm{d}y)+F_2\cdot(\mathrm{d}z-b\mathrm{d}y)=0$$

得到:

$$F_1\cdot\mathrm{d}x-(aF_1+bF_2)\cdot\mathrm{d}y+F_2\cdot\mathrm{d}z=0$$

故其切平面的法向量为 $(u, -au-bv, v)$，取直线：

$$\frac{x}{a} = y = \frac{z}{b}$$

即与切平面平行.

题 3

略

题 4

这个函数的条件极小值就是条件最小值；令 $F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{x}$，得到：

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{a} = 2\mathbf{x} + \lambda \mathbf{a} = 0$$

所以：

$$2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 0$$

故：

$$\lambda = -\frac{2\mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$$

此时

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

条件最小值为：$(\mathbf{a}^T \mathbf{x})^2$.

题 5

令

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{f(y, x)}$$

因为 D 关于 $x = y$ 对称，故

$$\iint_D g(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D g(y, x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

由柯西不等式：

$$\iint_D g(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \cdot \iint_D g(y, x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \geq \left(\iint_D \sqrt{g(x, y) \cdot g(y, x)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^2 = S(D)^2$$

其中 $S(D)$ 为区域 D 的面积，等号成立当且仅当 $g(x,y)=g(y,x)$ 时成立，此时 $f(y,x)=f(x,y)$，取 $f(x,y)=1+xy$ 即可满足条件。令 $x=r\cos^3\theta, y=r\sin^3\theta$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=3r\cos^2\theta\sin^2\theta$

$$S(D)=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{8}$$

题 6

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$，则积分变为:

$$\begin{aligned}\iiint_V (x^2+y^2)^5 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{r^2(1+2\cos^2\theta)+1}} r^{11}z\mathrm{d}z\\ =&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{11}[r^2(1+2\cos^2\theta)+1]\mathrm{d}r\\ =&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{14}(1+2\cos^2\theta)+\frac{1}{12}\right)\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{19\pi}{84}\end{aligned}$$

题 7

对任意等值线方程 $f(x,y)=C_0$，两边求全微分:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

根据条件:

$$y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

得到:

$$\frac{\partial f}{\partial y}d(x^2-y^2)=0$$

注意 $\nabla f\neq 0$，故等值线方程为：$x^2-y^2=C$，C 为任意常数。

题 8

令 $Q=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，容易求得极坐标方程为

$$r=a(1+\cos\theta)$$

所以区域面积为:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a^2}{2}$$

2 18-19

2.1 题 1

略

2.2 题 2

假设该曲线在一个平面上，则存在不全为零的实数 a,b,c 使下面三个等式恒成立:

$$a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z=0$$

$$\mathrm{d}x-y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y=0$$

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0$$

认为 $y=f(x),z=g(x)$ 都是 x 的隐函数，则由后面两式可以解得:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+yz^2}{y^2-z^2},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z+zy^2}{z^2-y^2}$$

代入第一个等式得:

$$a+b\frac{y+yz^2}{y^2-z^2}+c\frac{z+zy^2}{z^2-y^2}=0$$

这等价于：$a(y^2-z^2)+b(y+yz^2)-c(z+zy^2)=0$ 对任意 y,z 成立，此时 $a=b=c=0$，矛盾！故不可能在一个平面上。

题 3

对方程 $\frac{y}{x}=2\arctan\frac{y}{x}$ 求全微分:

$$\mathrm{d}\frac{y}{x}=\frac{2x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\frac{y}{x}$$

因此 $\mathrm{d}\frac{y}{x}=0$

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}y=\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x$$

故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$；再对 x 求导：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y}{x^2}=0$$

题 4

先求 $f(x,y)$ 的驻点，由驻点方程解得：$2x+y^2-1=0, 2xy=0$，解得：$(0,1),(0,-1),(1/2,0)$，并且 $f(0,1)=f(1,0)=0, f(1/2,0)=-1/4$。因为连续函数在闭区域上一定能取到最大最小值，我们只需再求出 $x^2+y^2=2$ 上的最大最小值与函数的极大极小值进行比较。令

$$F(x,y,\lambda)=x^2+xy^2-x+\lambda(x^2+y^2-2)$$

则：

$$2x+y^2-1+2\lambda x=0$$

$$2xy+2\lambda y=0$$

得到：$(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$，并且 $f(\sqrt{2},0)=2-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2},0)=2+\sqrt{2}$。比较下来，最大值为 $2+\sqrt{2}$，最小值为 $-1/4$。

题 5

容易验证 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的一阶偏导数。由对称性：

$$|f(x,y)-f(x+h,y+k)+a(x+h,y+k)h+b(x+h,y+k)k|\le C(|h|+|k|)^{3/2}$$

结合题目给出的条件：

$$|[a(x+h,y+k)-a(x,y)]h+[b(x+h,y+k)-b(x,y)]k|\le 2C(|h|+|k|)^{3/2}$$

对任意 $|h|+|k|\le 1$ 成立。不妨取 $h=\delta^2$，k 分别取 $\delta^2,-\delta^2$ 我们将得到：

$$|[a(x+\delta^2,y+\delta^2)-a(x,y)]+[b(x+\delta^2,y+\delta^2)-b(x,y)]|\le C_1\delta$$

$$|[a(x+\delta^2,y+\delta^2)-a(x,y)]-[b(x+\delta^2,y+\delta^2)-b(x,y)]|\le C_1\delta$$

所以 $|a(x+\delta^2,y+\delta^2)-a(x,y)|\le C_1\delta$。注意 δ 与 x,y 无关，故 $a(x,y)$ 一致连续。

题 6

设体积较小的区域为 V，令 $x=\sqrt{2}u, y=\sqrt{3}v, z=2w$，区域 V 变为 $\sqrt{2}u+\sqrt{3}v+2w\geq 1$ 与单位球相交的区域，球心到平面的距离为：$\frac{1}{3}$。根据对称性，该部分区域的体积也等于 $w\geq 1/3$ 与单位球相交区域的体积

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y = 2\sqrt{6}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\mathrm{d}w\iint_{u^2+v^2\leq 1-w^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\sqrt{6}\pi\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-w^2)\mathrm{d}w = \frac{56\sqrt{6}\pi}{81}$$

题 7

令 $x+y=u, x-y=v$，则 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$:

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^m v^m \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{[1^m-(-1)^m)]^2}{(m+1)^2}$$

题 8

将单位正方体补为中心在原点，边长为 2 的大正方体，则球与大正方体相交的体积为:

$$\frac{4\pi a^{3/2}}{3} - 6\int_{1}^{\sqrt{a}}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leq a-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4\pi a^{3/2}}{3} - 6\pi\int_{1}^{\sqrt{a}}(a-z^2)\mathrm{d}z = (6a-\frac{8a^{3/2}}{3}-2)\pi$$

故 $V(D\cap E) = (\frac{3a}{4}-\frac{a^{3/2}}{3}-\frac{1}{4})\pi$

3 20-21

题 1

略

题 2

参考前面两年类似的题目

3.1 题 3

换元：$x=ar\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\cos\phi, z=r\cos\theta$，计算略。

题 4

等价于求 $\ln(f(x)) = a\ln x + b\ln y + c\ln z$ 的条件最大值，计算略。

题 5

用复合函数的求导方法，计算略。

题 6

对椭圆方程两边求全微分，$\frac{2x}{9}\mathrm{d}x + \frac{y}{8}\mathrm{d}y + \frac{2z}{25}\mathrm{d}z = 0$，故切平面的法向为：$(\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{15})$，故切平面方程为 $\frac{1}{3}(x-\sqrt{3}) + \frac{1}{4}(y - \frac{4\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{5}(z - \frac{5\sqrt{3}}{3}) = 0$。

$$\iiint_V x(\sqrt{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\le\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}} x(\sqrt{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\le\sqrt{3}} (\sqrt{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5})^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{5\sqrt{3}} \mathrm{d}z \int_0^{4(\sqrt{3}-\frac{z}{5})} (\sqrt{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5})^3\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$$

题 7

（1）注意到 $f(P)$ 是平面上的连续函数，且有一个下界 0，故能在一个包含三角形的有界闭集上取到最小值。

（2）$\nabla f(P) = -\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} - \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|} - \frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|} = -\mathbf{e_A} - \mathbf{e_B} - \mathbf{e_C}$。

（3）假设有驻点，则 $\nabla f(P) = 0$ 有解，则：

$$\mathbf{e_A} \cdot \mathbf{e_A} = (\mathbf{e_B} + \mathbf{e_C}) \cdot (\mathbf{e_B} + \mathbf{e_C})$$

因此：$\cos <\mathbf{e_B}, \mathbf{e_C}> = -\frac{1}{2}$，同理 $\cos <\mathbf{e_A}, \mathbf{e_C}> = -\frac{1}{2}$，$\cos <\mathbf{e_A}, \mathbf{e_B}> = -\frac{1}{2}$，因为三角形有一个不小于 $\frac{2\pi}{3}$ 的内角，故无法达到。最小值在钝角处的顶点达到，因为在其他点处，我们总可以在这个点的领域找到另一个点使距离和更小。

题 8

（1）因为 $f(0,0) = 0$，故：

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0) = x\frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} + y\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$$

令 $g_1(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$，$g_2(x,y)=\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$，$g_1,g_2$ 可以证明是二阶连续可微的。

（2）令 $H(\mathbf{x})$ 为 f 在 (x,y) 的海塞矩阵，由题意，在原点的一个领域内，我们可以使 $det(H)<0$ 恒成立，此时：

$$H(\mathbf{x})=P(\mathbf{x})^T diag(1,-1)P(\mathbf{x})$$

由中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$，且令 $(u,v)^T=:P(\theta\mathbf{x})\mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T H(\theta\mathbf{x})\mathbf{x}=(P(\theta\mathbf{x})\mathbf{x})^T diag(1,-1)P(\theta\mathbf{x})\mathbf{x}=u^2-v^2$$