《数学分析B2》测验题

1. (6 分) 设 $I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x$, 求 $I'(u)$.

2. (12 分, 每小题 4 分) 设 $\boldsymbol{v}=\left(\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},1-\frac{xy}{z^2}\right)$

$(y>0,z>0)$. (1) 证明 $\boldsymbol{v}$ 是有势场;

(2) 求其全体势函数; (3) 计算 $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$.

扫描全能王 创建

3. (10 分) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D: x^2+y^2 \leqslant \pi$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $=\sin(x^2+y^2)$, n 为边界圆周 ∂D 的单位外法向, 计算曲线积分 $\displaystyle\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s$.

4. (12 分) 计算积分 $I=\displaystyle\iint_S 2(1+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲线 $y=\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转生成的旋转面, 法向与 x 轴正向夹角为钝角.

扫描全能王 创建

5. (10 分) 记 $v=(y^2+z^2)i+(z^2+x^2)j+(x^2+y^2)k$, 计算曲线积分

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$, 从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

6. (16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分)

(1) 将 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x,\ x\in[0,\pi]$ 展开成余弦级数;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

扫描全能王 创建

7. (16 分, 第 1 小题 4 分, 第 2, 3 小题 6 分)

(1) 求使积分 $\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛的参数取值范围;

(2) 收敛时, 利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$;

(3) 证明: 含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

8. (8 分) 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心, 任意 $r>0$ 为半径的半圆 $L: x=x_0+r\cos\theta,\ y=y_0+r\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, 恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0,$$

证明: $P(x,y)=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.

扫描全能王 创建

9. (20 分, 每小题 10 分)

(1) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x$, 其中 $0<a<b$.

(2) 设 $n, m>0$, 利用 Euler 积分计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}}\,\mathrm{d}x$.

扫描全能王 创建