2018 ～ 2019 学年第 2 学期多变量微积分期末考试答案

一、(本题10分)令$P(x,y)=xe^x+3x^2y \quad Q(x,y)=x^3+\sin y$,

$$\text{则} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2.\text{-------------}(2\text{分})$$

(1) 由格林公式，得 (D为曲线C所围区域)

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\text{----------}(5\text{分})$$

(2) 由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$可知，曲线积分与路径无关，则 ——————(7分)

$$\begin{aligned}I&=\int_{(-1,0)}^{(2,3)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left(\int_{(-1,0)}^{(2,0)}+\int_{(2,0)}^{(2,3)}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{2}xe^x\mathrm{d}x+\int_0^3(8+\sin y)\mathrm{d}y=e^2+2e^{-1}-\cos 3+25.\text{-----}(10\text{分})\end{aligned}$$

二、 (本题共20分：第1小题12分；第2小题8分)

1. (1) 要使 $\mathbf{V}$ 是有势场，

则 $\mathrm{rot}\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f(y,z)&xz&xy\end{vmatrix}=(0,f'_z-y,z-f'_y)=(0,0,0).$———(2分)

从而 $f'_z=y$ 且 $f'_y=z$, 解得 $f(y,z)=yz+C$, C为任意常数.———(4分)

(2) $f(0,0)=0$时, $f(y,z)=yz$. 由

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\mathrm{d}(xyz+C),$$

则取 $\mathbf{V}$ 的一个势函数$u(x,y,z)=xyz$.————(8分)

(3) 梯度方向方向导数取得最大值, 最大值为$|\mathrm{grad}\ u|_M=|(1,1,1)|=\sqrt{3}$;———(10分)

负梯度方向方向导数取得最小值, 最小值为$-|\mathrm{grad}\ u|_M=-\sqrt{3}$.—————-(12分)

2. 由含参变量常义积分的可导性

$$\begin{aligned}g'(x)=&-\int_{2^x}^{\cos^3 x}t^2(e^{-xt^2}+2x\sin(xt)^2)\mathrm{d}t-3\cos^2 x\sin x(e^{-x\cos^6 x}+\cos(x^2\cos^6 x))\\&-2^x\ln 2(e^{-x4^x}+\cos(x^2 4^x)).\text{--------}(6\text{分})\end{aligned}$$

$$g'(0)=-2\ln 2.\text{--------}(8\text{分})$$

三、(本题20分)

(1) 根据Fourier系数的展开公式得

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2},---------(1分)$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2},--(3分)$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{n\pi}.------(5分)$$

所以对应的Fourier级数为

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right).----(7分)$$

由Dirichlet收敛定理，当x为奇数时, 其Fourier级数收敛到

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{f(1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{1}{2};\text{———}(8分)$$

当x不为奇数时, 其Fourier级数收敛到$f(x)$自身.———-(9分)

(2) Parseval等式: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x$ ------------ (11分)

即 $$\frac{9}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^{n+1}+1)^2}{n^4\pi^4}+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

从而有 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^4\pi^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{5}{24}.\qquad (\triangle)--------(13分)$$

(3) 令$x=0$, 得 $\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}=f(0)=1$, $n=2k-1$时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}=\frac{1}{4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.----------(16分)$$

由上面($\triangle$)式， 得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.————-(20分)

四、(本题8分)

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{6}}--------(2分)\end{aligned}$$

当$\left|\frac{x-5}{2}\right|<1$, 且$\left|\frac{x-5}{6}\right|<1$, 即收敛区间为$3<x<7$时，———(4分)

$$\begin{aligned}上式&=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-5}{2}\right)^n-\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-5}{6}\right)^n--------(6分)\\&=\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{6^n}\right)(x-5)^n.------(7分)\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(5)=4!\times\frac{1}{24}\left(\frac{3}{2^4}-\frac{1}{6^4}\right)=\frac{121}{648}.----(8分)$$

五、(本题 10分)

解：令$a_n(x)=(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=x^2$,

则级数的收敛区间为$(-1,1)$. 当$|x|<1$时,————(2分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},\qquad |x|<1,---------(4分)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}t^{2n-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t(-1)^nu^{2n}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t---(6分)\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^{2n}\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\int_0^t\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t---(7分)\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x\arctan x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)------(9分)\end{aligned}$$

所以$S(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}x\arctan x-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)\quad(|x|<1)$.————(10分)

六、(本题10分)

解：设S为平面$x+y+z=2$上以C为边界的部分，取后侧，S与C构成右手系，其单位法向$\mathbf{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由$Stokes$公式得———-(2分)

$$\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-2x^2)\mathrm{d}y+(x^2-3y^2)\mathrm{d}z=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S\begin{vmatrix}1&1&1\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y^2-z^2&z^2-2x^2&x^2-3y^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S(6x+8y+4z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S(2x+4y+8)\mathrm{d}S------(6分)$$

$D:|x|+|y|\le 1$为S在平面Oxy上的投影,$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$—-(8分)

由积分区域的对称性: $I=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_D(2x+4y+8)\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16.$—(10分)

七、(本题12分)

解：令$P=\dfrac{x}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $Q=\dfrac{y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $R=\dfrac{z}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,------(2分)$$

当$0<a<1$时, Σ所围的体Ω不包含原点, 由Gauss公式有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=0.-------(4\text{分})$$

当$a>1$时, Σ所围的体Ω包含原点, P,Q,R在原点没有定义, 不能直接用Gauss公式. 对足够小的$\varepsilon>0$, 在Σ内作曲面$S:\ x^2+y^2+4z^2=\varepsilon^2$, 取内侧, 它所围体为$V_0$. 那么$\Sigma$与$S$围为环体，指向外侧, 环体为$V$, 两次应用Gauss公式得————-(6分)

$$I=\left(\iint\limits_{\Sigma\cup S}-\iint\limits_{S}\right)P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y----------(8\text{分})$$
$$=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y------(10\text{分})$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{S}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{V_0}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\varepsilon=2\pi.----(12\text{分})$$

八、(本题共10分：第1小题4分；第2小题6分)

1. 解：记 $a_n=\dfrac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}=\dfrac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$, 所讨论级数为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

$$\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{n})\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)------(2\text{分})$$

$$\therefore\qquad a_n<\frac{1}{3^{\ln(n+1)}}<\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}------3\text{分}$$

因为级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$收敛, 由比较判别法, 则级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.———-(4分)

2. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ne^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$. 当$x>0$ 时,

$$e^x>\frac{x^n}{n!}\Longrightarrow x^ne^{-x}<n!\Longrightarrow a_nx^ne^{-x}<a_nn!,------(2\text{分})$$

由于$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!$ 收敛, 由函数项级数一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法, 级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ne^{-x}$在$[0,+\infty)$上一致收敛. 所以对任意给定的 $A>0$,

$$\int_0^{A}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ne^{-x}\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{A}x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x,---------(4\text{分})$$

$A\to+\infty$时, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ne^{-x}\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Gamma(n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn!\ .--(6\text{分})$