中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

大学物理-基础实验｜实验报告

姓名　**王嘉璐**
学号　**PB21051167**
班级　**21 级 209 院 05 班（工程科学学院 5 班）**
日期　**2022 年 3 月 31 日**

扭摆法测钢丝切变模量†

1　实验目的

利用扭摆法测量钢丝切变模量，学习通过间接测量避免测量较难测准的物理量、从而提高实验精度的设计思想，学习数量级估计法估算测量周期数目。

2　实验原理

对于一根上下均匀而细长的钢丝，可将其视为弹性圆柱体，其半径为 R，长度为 L。将其上端固定，而使其下端面发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面体积元均发生切应变。在弹性限度内，切应力 τ 正比于切应变 γ，有

$$\tau = G\gamma \tag{1}$$

其中，比例系数 G 为钢丝的切变模量。

当该圆柱体下端面的扭转角度为 φ 时，选取其长度为 $\mathrm{d}l$ 的体积元，可以推知，相对该元上截面其下截面半径为 ρ 处的切应变为

$$\gamma(\rho) = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} \tag{2}$$

同时，该处的切应力产生的恢复力矩为

$$\mathrm{d}M = \tau(\rho)\cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho\cdot\rho \tag{3}$$

根据式 (1)~(3) 及几何关系式 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{\varphi}{L}$，可求得圆柱体产生的总恢复力矩为

$$M = \int_0^R \mathrm{d}M = 2\pi G\frac{\varphi}{R}\int_0^R \rho^3\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}GR^4\frac{\varphi}{L} \tag{4}$$

如果能求得钢丝扭转后的恢复力矩便可以计算其切变模量。

为此，在钢丝下端悬挂一圆盘作为摆，它可绕中心线自由扭动，成为扭摆。扭摆所受的恢复力矩正比于其扭转角度，即

$$M = D\phi \tag{5}$$

其中，D 为钢丝的扭转模量。根据转动定律

$$M = I_0\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

其中，I_0 为摆的转动惯量，由式 (5)(6)，有

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{I_0}\phi = 0 \tag{7}$$

†本报告由王嘉璐撰写，存在一定不足，仅供参考。如需了解不足、获取最新版本，请访问我的主页home.ustc.edu.cn/~luiswang。

解这个简谐运动微分方程，可得扭摆的周期为

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}。 \tag{8}$$

但这一圆盘的几何形状并不规则，摆的转动惯量不易计算。因此，可将一个金属环对称地置于圆盘上。设环的质量为 m，内外半径分别为 $r_{内}$ 和 $r_{外}$，转动惯量为 $I_0 = \frac{1}{2}m(r_{内}^2 + r_{外}^2)$，这时扭摆的周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \tag{9}$$

于是，有关系式

$$I_0 = I_1\frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}。 \tag{10}$$

综合式 (4)、(5) 及 (8)∼(10)，可以得到扭转模量 D 和切变模量 G 分别为

$$D = \frac{2\pi^2 m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{T_1^2 - T_0^2}, \tag{11}$$

$$G = \frac{4\pi Lm(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}。 \tag{12}$$

3 实验仪器

扭摆装置，螺旋测微器，游标卡尺，米尺，秒表。

4 实验步骤

1. 调整扭摆装置，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直、圆环能方便地置于圆盘上。
2. 用螺旋测微器测量钢丝直径，用游标卡尺测量环的内外径，用米尺测量钢丝的有效长度。
3. 写出相对误差公式，据此估算应测量的周期数目。
4. 选定扭转角度，测量放置金属环前后多个周期的时长。
5. 计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D，完成误差分析。
6. 测量不同扭转角度下的周期，研究钢丝的切变模量与其扭转角度的关系。

5 方案设计

利用最大不确定度公式与数量级估计法估算应测量周期数目。参考下面的 7.1.1 及 $t_0 = N_0T_0$、$t_1 = N_1T_1$，可知最大不确定度公式为

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2d_{内}\Delta d_{内}}{d_{内}^2 + d_{外}^2} + \frac{2d_{外}\Delta d_{外}}{d_{内}^2 + d_{外}^2} + \frac{4\Delta d}{d} + \frac{2T_0\Delta t_0}{N_0(T_1^2 - T_0^2)} + \frac{2T_1\Delta t_1}{N_1(T_1^2 - T_0^2)}$$

根据各测量量的粗测数据，有

测量量	L	m	$d_{内}$	$d_{外}$	d	t_0	t_1
相对误差的估计值	5×10^{-3}	10^{-3}	2×10^{-4}	2×10^{-4}	1.25×10^{-2}	$\frac{1.3}{N_0}\times10^{-1}$	$\frac{2.1}{N_1}\times10^{-1}$

表一　各测量量的相对误差的估计值

因此，N 的值越大，t_0、t_1 的相对误差越小。但考虑到，N 的值特别大，对操作人员的影响越大，也会对钢丝造成疲劳破坏、影响其切变模量，所以 N 取值使得这两项的相对误差为相对误差最大项即 d 的 1/3 至 1/5，即 $N_0 = N_1 = 15$。

6 测量记录

参见“附件：原始数据”。

7 分析与讨论

7.1 数据处理与误差分析

7.1.1 不确定度传递公式

由于式 (12) 中包含非直接测量量，利用

$$r_{内}=\frac{d_{内}}{2},\ r_{外}=\frac{d_{外}}{2},\ R=\frac{d}{2}$$

$$T_0=\frac{t_0}{15},\ T_1=\frac{t_1}{15}$$

其中，$d_{内}$，$d_{外}$ 及 d 分别为金属环的内外直径及钢丝的直径，t_0 和 t_1 分别为放置金属环前后 15 个周期的时长，因此切变模量 G 为

$$G=\frac{3600\pi Lm(d_{内}^2+d_{外}^2)}{d^4(t_1^2-t_0^2)}。$$

对上式两边取对数，得

$$\ln G=\ln 3600\pi+\ln L+\ln m+\ln(d_{内}^2+d_{外}^2)-4\ln d-\ln(t_1^2-t_0^2)$$

求微分，得

$$\frac{\mathrm{d}G}{G}=\frac{\mathrm{d}L}{L}+\frac{\mathrm{d}m}{m}+\frac{2d_{内}}{d_{内}^2+d_{外}^2}\mathrm{d}d_{内}+\frac{2d_{外}}{d_{内}^2+d_{外}^2}\mathrm{d}d_{外}-\frac{4}{d}\mathrm{d}d-\frac{2t_0}{t_1^2-t_0^2}\mathrm{d}t_0-\frac{2t_1}{t_1^2-t_0^2}\mathrm{d}t_1$$

将微分改为不确定度，对每项取平方，经化简知切变模量 G 的不确定度传递公式为

$$\frac{U_G}{G}=\sqrt{\frac{U_L^2}{L^2}+\frac{U_m^2}{m^2}+(\frac{2d_{内}}{d_{内}^2+d_{外}^2})^2{U_{d_{内}}}^2+(\frac{2d_{外}}{d_{内}^2+d_{外}^2})^2{U_{d_{外}}}^2+(\frac{4}{d})^2U_d^2+(\frac{2t_0}{t_1^2-t_0^2})^2{U_{t_0}}^2+(\frac{2t_1}{t_1^2-t_0^2})^2{U_{t_1}}^2}。$$

同理，扭转模量 D 及其不确定度传递公式分别为

$$D=\frac{225\pi^2m(d_{内}^2+d_{外}^2)}{2(t_1^2-t_0^2)},$$

$$\frac{U_D}{D}=\sqrt{\frac{U_m^2}{m^2}+(\frac{2d_{内}}{d_{内}^2+d_{外}^2})^2{U_{d_{内}}}^2+(\frac{2d_{外}}{d_{内}^2+d_{外}^2})^2{U_{d_{外}}}^2+(\frac{4}{d})^2U_d^2+(\frac{2t_0}{t_1^2-t_0^2})^2{U_{t_0}}^2+(\frac{2t_1}{t_1^2-t_0^2})^2{U_{t_1}}^2}。$$

7.1.2 计算与不确定度分析

钢丝有效长度 L 的平均值为

$$\overline{L}=\frac{46.61+46.55+46.60+46.58+46.54+46.61}{6}cm=46.582cm$$

其标准差为

$$\sigma_L=\sqrt{\frac{(46.61-46.582)^2+(46.55-46.582)^2+(46.60-46.582)^2+(46.58-46.582)^2+(46.54-46.582)^2+(46.61-46.582)^2}{6-1}}cm$$
$$=0.0306cm$$

因此，其展伸不确定度为

$$U_L=\sqrt{(t_P\frac{\sigma_L}{\sqrt{n}})^2+(k_P\frac{\Delta_L}{C})^2}=\sqrt{(2.57\times\frac{0.0306}{\sqrt{6}})^2+(1.96\times\frac{0.2}{3})^2}cm=0.1346cm\quad(P=0.95)$$

其中，$\Delta_L = \Delta_{尺} = 0.2cm$。

钢丝直径 d 的平均值为

$$\overline{d} = \frac{0.779 + 0.780 + 0.779 + 0.775 + 0.776 + 0.776 + 0.777 + 0.778 + 0.775}{9} mm = 0.7772mm$$

其标准差为

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{(0.779 - 0.7772)^2 + (0.780 - 0.7772)^2 + (0.779 - 0.7772)^2 + (0.775 - 0.7772)^2 + \cdots + (0.775 - 0.7772)^2}{9 - 1}} mm$$
$$= 0.00186mm$$

因此，其展伸不确定度为

$$U_d = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_d}{C})^2} = \sqrt{(2.37 \times \frac{0.00186}{\sqrt{9}})^2 + (1.96 \times \frac{0.2}{3})^2} mm = 0.0067mm \quad (P = 0.95)$$

其中，$\Delta_d = \Delta_{千} = 0.01mm$。

金属环质量 m 的展伸不确定度为

$$U_m = k_P \frac{\Delta_m}{C} = 1.96 \times \frac{0.5}{3} g = 0.3267g \quad (P = 0.95)$$

其中，$\Delta_m = \Delta_{天平} = 0.5g$。

金属环内径 $d_{内}$ 的平均值为

$$\overline{d_{内}} = \frac{84.24 + 84.18 + 84.24 + 84.22 + 84.24 + 84.22}{6} mm = 84.223mm$$

其标准差为

$$\sigma_{d_{内}} = \sqrt{\frac{(84.24 - 84.223)^2 + (84.18 - 84.223)^2 + (84.24 - 84.223)^2 + (84.22 - 84.223)^2 + (84.24 - 84.223)^2 + (84.22 - 84.223)^2}{6 - 1}} mm$$
$$= 0.0234mm$$

因此，其展伸不确定度为

$$U_{d_{内}} = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_{d_{内}}}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_{d_{内}}}{C})^2} = \sqrt{(2.57 \times \frac{0.0234}{\sqrt{6}})^2 + (1.645 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}})^2} mm = 0.0310mm \quad (P = 0.95)$$

其中，$\Delta_{d_{内}} = \Delta_{卡} = 0.02mm$。

金属环外径 $d_{外}$ 的平均值为

$$\overline{d_{外}} = \frac{104.02 + 104.02 + 104.02 + 104.02 + 104.00 + 104.04}{6} mm = 104.02mm$$

其标准差为

$$\sigma_{d_{外}} = \sqrt{\frac{(104.02 - 104.02)^2 + (104.02 - 104.02)^2 + (104.02 - 104.02)^2 + (104.02 - 104.02)^2 + \cdots + (104.04 - 104.02)^2}{6 - 1}} mm$$
$$= 0.0127mm$$

因此，其展伸不确定度为

$$U_l = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_{d_{外}}}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_{d_{外}}}{C})^2} = \sqrt{(2.57 \times \frac{0.0127}{\sqrt{6}})^2 + (1.645 \times \frac{0.02}{\sqrt{3}})^2} cm = 0.0232mm \quad (P = 0.95)$$

其中，$\Delta_{d_{外}} = \Delta_{卡} = 0.02mm$。

放置金属环前 15 个周期时长 t_0 的平均值为

$$\overline{t_0} = \frac{34.52 + 34.45 + 34.44}{3} s = 34.47s$$

其标准差为

$$\sigma_{t_0}=\sqrt{\frac{(34.52-34.47)^2+(34.45-34.47)^2+(34.44-34.47)^2}{3-1}}s$$
$$=0.0436s$$

由于其 B 类不确定度的最大值为

$$\Delta_{t_0}=\sqrt{(\Delta_{秒})^2+(\Delta_{人})^2}=\sqrt{(0.2)^2+(0.01)^2}s=0.200s$$

其展伸不确定度为

$$U_{t_0}=\sqrt{(t_P\frac{\sigma_{t_0}}{\sqrt{n}})^2+(k_P\frac{\Delta_{t_0}}{C})^2}=\sqrt{(4.3\times\frac{0.0436}{\sqrt{3}})^2+(1.96\times\frac{0.200}{3})^2}s=0.1697s\quad(P=0.95)。$$

放置金属环后 15 个周期时长 t_1 的平均值为

$$\overline{t_1}=\frac{58.29+58.28+58.32}{3}s=58.297s$$

其标准差为

$$\sigma_{t_1}=\sqrt{\frac{(58.29-58.297)^2+(58.29-58.297)^2+(58.29-58.297)^2}{3-1}}s$$
$$=0.0208s$$

由于其 B 类不确定度的最大值为

$$\Delta_{t_1}=\sqrt{(\Delta_{秒})^2+(\Delta_{人})^2}=\sqrt{(0.2)^2+(0.01)^2}s=0.200s$$

其展伸不确定度为

$$U_{t_1}=\sqrt{(t_P\frac{\sigma_{t_1}}{\sqrt{n}})^2+(k_P\frac{\Delta_{t_1}}{C})^2}=\sqrt{(4.3\times\frac{0.0208}{\sqrt{3}})^2+(1.96\times\frac{0.200}{3})^2}s=0.1405s\quad(P=0.95)。$$

根据切变模量 G 公式及以上数据，有

$$\overline{G}=\frac{3600\pi\overline{L}\overline{m}(\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2)}{\overline{d}^4(\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2)}=\frac{3600\times3.1416\times46.582\times574.4\times(84.223^2+104.02^2)\times10^{-11}}{0.7772^4\times(58.297^2-34.47^2)\times10^{-12}}m\cdot s^{-2}=6.722\times10^{10}N\cdot m^{-2}$$

又根据其展伸不确定度满足

$$\frac{U_G}{\overline{G}}=\sqrt{\frac{U_L^2}{\overline{L}^2}+\frac{U_m^2}{\overline{m}^2}+(\frac{2\overline{d_{内}}}{\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2})^2U_{d_{内}}{}^2+(\frac{2\overline{d_{外}}}{\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2})^2U_{d_{外}}{}^2+(\frac{4}{\overline{d}})^2U_d^2+(\frac{2\overline{t_0}}{\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2})^2U_{t_0}{}^2+(\frac{2\overline{t_1}}{\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2})^2U_{t_1}{}^2}$$
$$=[\frac{0.1346^2}{46.582^2}+\frac{0.3276^2}{574.4^2}+(\frac{2\times84.223}{84.223^2+104.02^2})^2\times0.0310^2+(\frac{2\times104.02}{84.223^2+104.02^2})^2\times0.0232^2+(\frac{4}{0.7772})^2\times0.0067^2$$
$$+(\frac{2\times34.47}{58.297^2-34.47^2})^2\times0.1697^2+(\frac{2\times58.297}{58.297^2-34.47^2})^2\times0.1405^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$=0.0358\quad(P=0.95)$$

可知 $U_G=6.722\times10^{10}\times0.0358N\cdot m^{-2}=0.241\times10^{10}N\cdot m^{-2}(P=0.95)$。因此，将该不确定度保留至 2 位有效数字，并将切变模量 G 的有效数字与其对齐，有

$$G=\overline{G}\pm U_G=(6.72\pm0.24)\times10^{10}N\cdot m^{-2}\quad(P=0.95)。$$

同理，扭转模量 D 及其展伸不确定度分别为

$$\overline{D}=\frac{225\pi^2\overline{m}(\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2)}{2(\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2)}=\frac{225\times3.1416^2\times574.4\times(84.223^2+104.02^2)\times10^{-9}}{2\times(58.297^2-34.47^2)}N\cdot m=5.169\times10^{-3}N\cdot m,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{U_D}{\overline{D}} &= \sqrt{\frac{U_m^2}{\overline{m}^2}+\left(\frac{2\overline{d_{内}}}{\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2}\right)^2 U_{d_{内}}{}^2+\left(\frac{2\overline{d_{外}}}{\overline{d_{内}}^2+\overline{d_{外}}^2}\right)^2 U_{d_{外}}{}^2+\left(\frac{2\overline{t_0}}{\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2}\right)^2 U_{t_0}{}^2+\left(\frac{2\overline{t_1}}{\overline{t_1}^2-\overline{t_0}^2}\right)^2 U_{t_1}{}^2} \\
&= [\frac{0.3276^2}{574.4^2}+(\frac{2\times 84.223}{84.223^2+104.02^2})^2\times 0.0310^2+(\frac{2\times 104.02}{84.223^2+104.02^2})^2\times 0.0232^2 \\
&\quad +(\frac{2\times 34.47}{58.297^2-34.47^2})^2\times 0.1697^2+(\frac{2\times 58.297}{58.297^2-34.47^2})^2\times 0.1405^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.00914 \quad (P=0.95)
\end{aligned}
$$

可知 $U_D = 5.169\times 10^{-3}\times 0.00914 N\cdot m = 0.047\times 10^{-3} N\cdot m (P=0.95)$。因此，将该不确定度保留至 1 位有效数字，并将扭转模量 D 的有效数字与其对齐，有

$$D = \overline{D}\pm U_D = (5.17\pm 0.05)\times 10^{-3} N\cdot m \quad (P=0.95)。$$

7.2 提高实验

7.2.1 实验名称

探究钢丝的切变模量与其扭转角度的关系。

7.2.2 数据处理

根据下式

$$G=\frac{3600\pi L m(d_{内}^2+d_{外}^2)}{d^4(t_1^2-t_0^2)}$$

及各个扭转角度下的数据，经如上计算，有

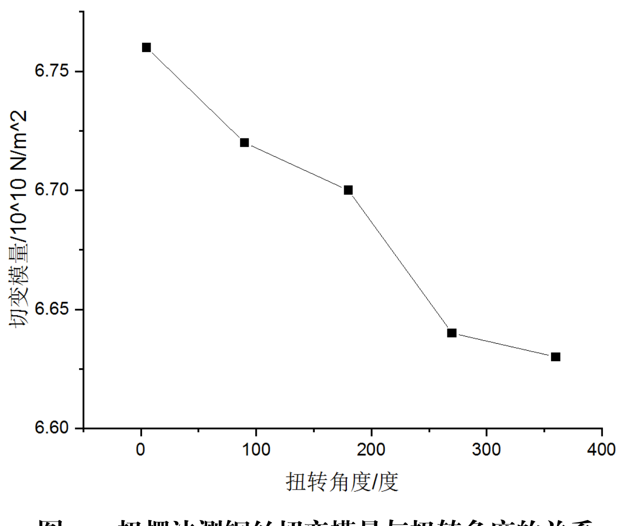
扭转角度/度	5[1]	90	180	270	360
切变模量/$\times 10^{10} N\cdot m^{-2}$	6.76	6.72	6.70	6.64	6.63

注 [1]：5 度表示约为 5 度的小角度

表二 不同扭转角度下钢丝的切变模量

7.2.3 图像分析与结论

由表二数据绘制成图像，有



图一 扭摆法测钢丝切变模量与扭转角度的关系

通过图像看出，随着扭转角度增大，钢丝切变模量减小，但增大相同角度其减小的幅度也在减小，钢丝切变模量在趋于某一特定值。因此可以推断，在一定范围内，钢丝切变模量随扭转角度增大而减小并趋于稳定。

7.3 实验讨论

根据数据处理结果，切变模量 G 的相对不确定度为 3.58%，扭转模量 D 的相对不确定度为 0.91%，误差满足预期，测量结果较好。切变模量与其扭转角度的关系得到判断，趋势较明显。

参考【常帅, 王渊敏, 陈骏逸, 等. 钢丝的切变模量与扭转角度关系 [J]. 物理实验,2006,26(6):45-47. DOI:10.3969/j.issn.1005-4642.2006.06.013.】中的数据，钢丝切变模量的公认值为 $7.8 \times 10^{10} N \cdot m^{-2}$，与其扭转角度的关系：切变模量随扭转角度增大而减小，当扭转角度大于 270 度时切变模量趋于定值。

因此，测量值略小于公认值但在合理范围内，而关系符合的较好。其中，测量值略小可以认为，钢丝长期悬挂重物而造成金属疲劳、产生轻微形变，导致其切变模量减小。

8 思考题

8.1 本实验是否满足 $\gamma << 1$ 的条件？

由式 (2) 与几何关系 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{\varphi}{L}$，可知 γ 最大值为

$$\gamma_{max} = \frac{\overline{d}}{2}\frac{\varphi_{max}}{\overline{L}} = \frac{0.7772 \times 10^{-3}}{2}\frac{2 \times 3.1416}{46.582 \times 10^{-2}} = 5.24 \times 10^{-3}$$

因此，满足 $\gamma << 1$。

8.2 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

设计上，设法避免测量较难测准的物理量。由于难以直接测量摆的转动惯量，利用摆上放置金属环前后的周期关系，转为测量金属环的质量与内外径以求得测量金属环的转动惯量。

操作上，利用估算法，求得测量周期的数目，利用累计法，降低周期的相对误差；测量前，调整扭摆装置，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直。

附件

原始数据