

中国科学技术大学
大学物理-基础实验 A 实验报告



实验题目切变模量的测量

学生姓名廖荣

学生学号PB21071406

完成日期2022年5月10日

物理实验教学中心制

2020年09月

1 实验目的

用扭摆来测量金属丝的切变模量，同时要学习尽量设法避免测量那些较难测准的物理量，从而提高实验精度的设计思想。

2 实验原理

实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝，从几何上说可以等效为一细长的圆柱体，其半径为 R ，长度为 L 。将其上端固定，而使其下端发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面小体积元均发生切应变。

在弹性限度内，且切应变 $\gamma \ll 1$ 时，可将扭摆的转动类比于小振动，于是可以通过测量扭摆转动的周期，间接计算出钢丝的切变模量：

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0$$

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4}$$

其中， T_0 是扭摆不悬挂其他物体时的转动周期， I_0 是扭摆对其悬挂点的转动惯量；但是由于扭摆的固定方式导致其转动惯量难以被测出，因此可以将一个金属环对称地置于圆盘上。

设这个金属环具有质量 m ，内半径 r_{inner} 和外半径 r_{outer} ，置于圆盘上后可得到转动周期 T_1 ，利用比值法，可将上面的公式改写成：

$$D = \frac{2\pi^2 m (r_{inner}^2 + r_{outer}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$G = \frac{4\pi L m (r_{inner}^2 + r_{outer}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)}$$

3 实验仪器

1. 待测钢丝、扭摆及悬挂装置（其中待测钢丝下已经悬挂了圆盘）
2. 已知质量的金属环
3. 卷尺（最小分度值 1mm）
4. 游标卡尺（最小分度值 0.02mm）
5. 螺旋测微器（最小分度值 0.01mm）
6. 电子秒表

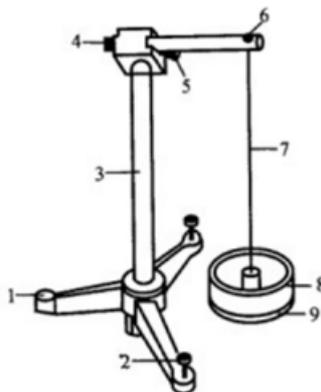


图 1: 实验装置示意图

实 验 报 告

071 系 21 级 1 班

廖荣 PB21071406

2022 年 5 月 10 日

4 实验步骤

装置扭摆，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直，圆环应能方便地置于圆盘上。
用螺旋测微器测钢丝直径，用游标卡尺测环的内外径，用米尺测钢丝的有效长度。
写出相对误差公式，据此估算应测多少个周期较合适。
计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D ，分析误差。

5 实验数据

5.1 长度测量

表 1: 钢丝直径测量原始数据

钢丝直径 d/mm	上部	中部	下部
1	0.782	0.778	0.779
2	0.781	0.780	0.779
3	0.782	0.779	0.779

得到钢丝直径 $\bar{d} = 0.780mm$ ，则钢丝半径 $\bar{R} = 0.3900mm$ （暂时多保留一位有效数字）

表 2: 钢丝长度测量原始数据

钢丝长度 L/cm	45.25	45.20	45.23
-------------	-------	-------	-------

得到钢丝长度 $\bar{L} = 45.227cm$ （暂时多保留一位有效数字）

表 3: 圆环内外直径测量原始数据

测量序号	圆环内直径/cm	圆环外直径/cm
1	8.394	10.400
2	8.408	10.394
3	8.406	10.396

得到圆环内直径 $\bar{d}_{inner} = 8.403cm$ ，圆环外直径 $\bar{d}_{outer} = 10.397cm$ 。则圆环内半径 $\bar{r}_{inner} = 4.2015cm$ ，圆环外半径 $\bar{r}_{outer} = 5.1985cm$ （暂时多保留一位有效数字）

5.2 质量测量

本实验中，实验室给定了金属圆环的质量 $m = 564.5g$ 。其测量不确定度按照 500g 量程物理天平在接近满量程时的最大允差 0.08g 来计算。

5.3 测量周期数的确定

根据相对误差公式可以得出：

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{4\Delta R}{R} + \frac{2r_{inner}\Delta r_{inner} + 2r_{outer}\Delta r_{outer}}{r_{inner}^2 + r_{outer}^2} + \frac{2T_0\Delta T_0 + 2T_1\Delta T_1}{T_1^2 + T_0^2}$$

实 验 报 告

071 系 21 级 1 班

廖荣 PB21071406

2022 年 5 月 10 日

其中，带入前面所得数据进行估计发现（具体数值计算已在实验设计部分中呈现），主要误差项为 $\frac{4\Delta R}{R}$ 项。而与周期有关的项应当通过增大单次计时周期数来减小误差，使之小于主要误差的 $\frac{1}{5}$ 即可。

于是可以得到两个不等式：

$$\frac{2T_0\Delta T_0}{T_1^2 + T_0^2} < \frac{1}{5} \frac{4\Delta R}{R}$$
$$\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2 + T_0^2} < \frac{1}{5} \frac{4\Delta R}{R}$$

对扭摆周期进行估测，可解出需要 40 个以上周期，所以接下来本实验中每次周期测量均使扭摆摆动 45 个完整周期。

5.4 周期测量

表 4: 周期测量原始数据（摆角 270° ）

测量序号	未放置圆环的 T_0/s	放置圆环的 T_1/s
1	101.80	170.27
2	101.91	170.16
3	101.85	170.81

6 数据处理和误差分析

6.1 扭转模量 D 和切变模量 G 的值

以下误差分析在置信概率 $P = 0.95$ 的条件下进行。

首先计算出周期的平均值：

$$\bar{T}_0 = \frac{T_{01} + T_{02} + T_{03}}{3 \times 45} = \frac{101.80 + 101.91 + 101.85}{3 \times 45} = 2.263s$$
$$\bar{T}_1 = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{3 \times 45} = \frac{170.27 + 170.16 + 170.81}{3 \times 45} = 3.787s$$

由前面计算已知钢丝半径 $\bar{R} = 0.3900mm$ ，钢丝长度 $\bar{L} = 45.227cm$ ，圆环内半径 $\bar{r}_{inner} = 4.2015cm$ ，圆环外半径 $\bar{r}_{outer} = 5.1835cm$ ，金属圆环的质量 $m = 564.5g$ 。代入得

$$D = \frac{2\pi^2 m (r_{inner}^2 + r_{outer}^2)}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2 \times 3.14^2 \times 0.5645 \times (0.042015^2 + 0.051985^2)}{3.787^2 - 2.263^2}$$
$$D = 0.00539Pa$$

$$G = \frac{4\pi L m (r_{inner}^2 + r_{outer}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)} = \frac{4 \times 3.14 \times 0.45227 \times 0.5645 \times (0.042015^2 + 0.051985^2)}{(3.9 \times 10^{-4})^4 \times 3.787^2 - 2.263^2}$$
$$G = 6.716 \times 10^{10} Pa$$

6.2 U_L 的分析与确定

钢丝长度 L 的不确定度只需要考虑 B 类不确定度，故有

$$\Delta L = \Delta_B L = 0.05cm$$
$$U_L = k_P \frac{\Delta L}{C} = 1.960 \times \frac{0.05cm}{3} = 0.033cm$$

6.3 U_R 的分析与确定

首先计算对钢丝半径九次测量的标准差:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^9 (d_k/2 - \bar{R})^2}{9-1}} = 0.0007mm$$

螺旋测微器测量钢丝半径的误差为测量直径的误差 0.005mm 的一半, 故 $\Delta R = 0.0025mm$

根据不确定度合成公式:

$$u_A = \frac{\sigma_R}{\sqrt{9}} = \frac{0.0007mm}{\sqrt{9}} = 0.0002mm$$

$$u_B = k_p \times \frac{\Delta_B}{C} = 1.96 \times \frac{0.0025mm}{3} = 0.0016mm$$

$$U_R = \sqrt{(t_P \times u_A)^2 + (u_B)^2} = \sqrt{(2.31 \times 0.0002)^2 + (0.0016)^2} = 0.0017mm$$

6.4 U_m 的分析与确定

直接根据 500g 量程物理天平在接近满量程时的最大允差 0.08g 得到

$$U_m = 0.08g$$

6.5 $U_{r_{inner}}$ 的分析与确定

首先计算对圆环内半径三次测量的标准差:

$$\sigma_{r_{inner}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 (d_k/2 - \bar{r}_{inner})^2}{3-1}} = 0.004cm$$

游标卡尺测量圆环内半径的误差为测量内直径的误差 0.002cm 的一半, 故 $\Delta r_{inner} = 0.001cm$

根据不确定度合成公式

$$u_A = \frac{\sigma_{r_{inner}}}{\sqrt{3}} = \frac{0.001cm}{\sqrt{3}} = 0.0006cm$$

$$u_B = k_p \times \frac{\Delta_B}{C} = 1.645 \times \frac{0.001cm}{\sqrt{3}} = 0.0009cm$$

$$U_{r_{inner}} = \sqrt{(t_P \times u_A)^2 + (u_B)^2} = \sqrt{(4.30 \times 0.0006)^2 + (0.0009)^2} = 0.003cm$$

6.6 $U_{r_{outer}}$ 的分析与确定

首先计算对圆环内半径三次测量的标准差:

$$\sigma_{r_{outer}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 (d_k/2 - \bar{r}_{outer})^2}{3-1}} = 0.0015cm$$

游标卡尺测量圆环内半径的误差为测量内直径的误差 0.002cm 的一半, 故 $\Delta r_{outer} = 0.001cm$

根据不确定度合成公式

$$u_A = \frac{\sigma_{r_{outer}}}{\sqrt{3}} = \frac{0.0015cm}{\sqrt{3}} = 0.0008cm$$

$$u_B = k_p \times \frac{\Delta_B}{C} = 1.645 \times \frac{0.001cm}{\sqrt{3}} = 0.0009cm$$

$$U_{r_{inner}} = \sqrt{(t_P \times u_A)^2 + (u_B)^2} = \sqrt{(4.30 \times 0.0008)^2 + (0.0009)^2} = 0.004cm$$

6.7 U_0 的分析与确定

首先计算对不放置圆环时的周期三次测量的标准差:

$$\sigma T_0 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 (T_{0k}/45 - \bar{T}_0)^2}{3-1}} = 0.001s$$

对于周期测量, 其误差为 $\Delta T = \sqrt{(\Delta T_{instrument})^2 + (\Delta T_{person})^2} = 0.005s$

$$u_A = \frac{\sigma T_0}{\sqrt{3}} = \frac{0.001s}{\sqrt{3}} = 0.0006s$$

$$u_B = k_p \times \frac{\Delta_B}{C} = 1.960 \times \frac{0.005s}{3} = 0.003s$$

$$U_0 = \sqrt{(t_P \times u_A)^2 + (u_B)^2} = \sqrt{(4.30 \times 0.0006)^2 + (0.003)^2} = 0.004s$$

6.8 U_1 的分析与确定

首先计算对放置圆环时的周期三次测量的标准差:

$$\sigma T_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 (T_{1k}/45 - \bar{T}_0)^2}{3-1}} = 0.008s$$

对于周期测量, 其误差为 $\Delta T = \sqrt{(\Delta T_{instrument})^2 + (\Delta T_{person})^2} = 0.005s$

$$u_A = \frac{\sigma T_0}{\sqrt{3}} = \frac{0.008s}{\sqrt{3}} = 0.006s$$

$$u_B = k_p \times \frac{\Delta_B}{C} = 1.960 \times \frac{0.005s}{3} = 0.003s$$

$$U_1 = \sqrt{(t_P \times u_A)^2 + (u_B)^2} = \sqrt{(4.30 \times 0.006)^2 + (0.003)^2} = 0.02s$$

6.9 扭转模量 D 和切变模量 G 的不确定度和最终结果

6.9.1 扭转模量 D

根据误差分析公式, 得到扭转模量的不确定度为:

$$U_D = \bar{D} \sqrt{\left(\frac{U_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2r_{inner}U_{r_{inner}}}{r_{inner}^2 + r_{outer}^2}\right)^2 + \left(\frac{2r_{outer}U_{r_{outer}}}{r_{inner}^2 + r_{outer}^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_0U_0}{T_1^2 - T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_1U_1}{T_1^2 - T_0^2}\right)^2}$$

$$U_D = 0.09 \times 10^{-3} Pa$$

最终的结果应该表示为 $D = \bar{D} \pm U_D = (5.39 \pm 0.09) \times 10^{-3} Pa, P = 0.95$

相对不确定度为 $1.6\% < 5\%$, 满足实验要求。

6.9.2 切边模量 G

根据误差分析公式, 得到切边模量的不确定度为:

$$U_G = \bar{G} \sqrt{\left(\frac{U_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{4U_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2r_{inner}U_{r_{inner}}}{r_{inner}^2 + r_{outer}^2}\right)^2 + \left(\frac{2r_{outer}U_{r_{outer}}}{r_{inner}^2 + r_{outer}^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_0U_0}{T_1^2 - T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_1U_1}{T_1^2 - T_0^2}\right)^2}$$

$$U_G = 0.162 \times 10^{10} Pa$$

最终的结果应该表示为 $G = \bar{G} \pm U_G = (6.693 \pm 0.162) \times 10^{10} Pa, P = 0.95$

相对不确定度为 $2.4\% < 5\%$, 满足实验要求。

实 验 报 告

071 系 21 级 1 班

廖荣 PB21071406

2022 年 5 月 10 日

7 思考题

7.1 实验是否满足 $\gamma \ll 1$ 的条件

本实验采取 $\phi = 270^\circ$ 的转角，此时最大切应变 $\gamma_{max} = R \frac{\phi}{L} = 0.00039 \times \frac{0.75\pi}{0.4523} = 0.0020 \ll 1$ ，所以满足小幅摆动的条件。

7.2 提高测量精度的设计和操作

1. 利用测定 45 个周期的方法，减少时间测量时的误差对周期测定的影响，提高精度；
2. 采用了游标卡尺和螺旋测微器对各类长度量进行了精密测量；
3. 选取较大的起摆角度，控制了切应变的大小，使实验过程中近似关系始终成立；
4. 对各个直接测量的物理量进行多次测量，提高精度，减小实验误差。