

锁相放大器

廖荣

中国科学技术大学 微尺度物质科学国家研究中心 物理学院, 合肥 230026

合肥国家实验室, 合肥 230088

摘要: 锁相放大器是光学和光子学、纳米技术和材料科学、量子技术、扫描探针显微镜和传感器等领域的研究实验室的重要组成部分。锁相放大器能够提取隐藏在噪声中的非常微弱的信号, 有助于发现新的科学现象, 并延展实验装置的范围。锁相放大器的工作原理被称为解调或相敏检测。此技术将待测信号与参考频率混合, 然后进行低通滤波处理。选择合适的调制频率, 使待测信号远离主要噪声源 (尤其在直流附近)。使用正确的滤波器设置, 可以进一步提高信噪比 (SNR)。
关键词: 锁相放大器; 低通滤波器

Lock in Amplifier

Rong Liao

Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale and School of Physical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China

Abstract: Phase-locked amplifiers are an important part of research laboratories in the fields of optics and photonics, nanotechnology and materials science, quantum technology, scanning probe microscopy, and sensors. Phase-locked amplifiers can extract very weak signals hidden in noise, helping to discover new scientific phenomena and extending the range of experimental devices. The working principle of a phase-locked amplifier is called demodulation or phase-sensitive detection. This technique mixes the signal to be measured with the reference frequency and then performs low-pass filtering. Select the appropriate modulation frequency to keep the signal under test away from the main noise source (especially near DC). With the correct filter Settings, the signal-to-noise ratio (SNR) can be further improved.

Keywords: Lock in Amplifier; Low Pass Filter

1 简介

锁相放大器技术于 20 世纪 30 年代问世 [1, 2, 3] 并于 20 世纪中期进入商业化应用阶段 [4], 这种电子仪器能够在极强噪声环境中提取信号幅值和相位信息 (参见 Figure 1)。锁相放大器采用零差检测方法和低通滤波技术, 测量相对于周期性参考信号的信号幅值和相位。锁相测量方法可提取以参考频率为中心的指定频带内的信号, 有效滤除所有其他频率分量。如今, 市面上最好的锁相放大器具有高达 120 dB 的动态储备 [5], 意味着这些放大器可以在噪声幅值超过期望信号幅值百万倍的情况下实现精准测量。

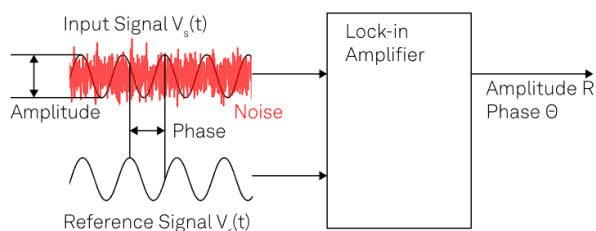


图 1: 锁相放大器可测量待测信号相对于特定参考信号的幅值和相位 (甚至是完全淹没在噪声之中的信号)

几十年来, 随着科技的不断发展, 研究人员已经针对锁相放大器研发出诸多不同的应用方法。如今的锁相放大器主要用作精密交流电压仪和交流相位计、噪声测量单元、阻抗谱仪、网络分析仪、频谱分析仪以及锁相环中的鉴相器。相关研究领域几乎覆盖了所有波长范围和温度条件, 例如全日光

条件下的日冕观测 [6]、分数量子霍尔效应的测量 [7] 或者分子中原子间键合特性的直接成像 [8]。锁相放大器的功能极其丰富多样。与频谱分析仪和示波器一样，锁相放大器不可或缺，已经成各种实验室装备中的核心工具，比如物理、工程和生命科学等。

2 工作原理

锁相放大器利用信号的时间相关性将信号从嘈杂背景中提取出来。锁相放大器首先将输入信号与参考信号相乘（有时也称下混频或外差/零差检测），然后通过一个可调低通滤波器进行滤波。这种方法称为解调检测或相敏检测，用于将期望频率的信号从所有其他频率分量中分离出来。参考信号可由锁相放大器自身生成，也可由外部信号源提供给锁相放大器和实验设备。

2.1 双向解调

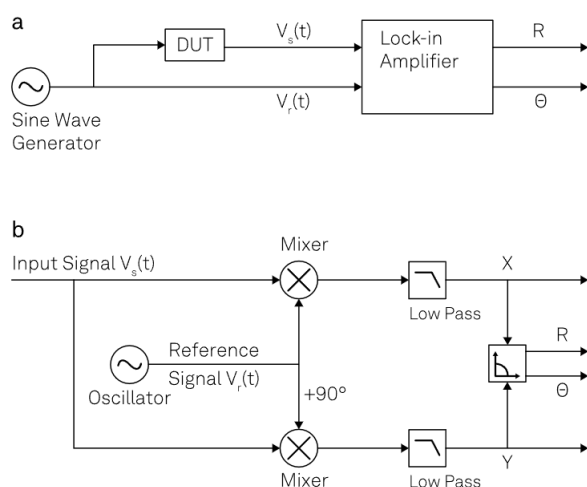


图 2: (a) 典型锁相测量过程的示意图。正弦信号一方面用来驱动 DUT，另一方面也作为参考信号使用。锁相放大器将对 DUT 的响应进行分析，并输出相对于参考信号的信号幅值和相位。(b) 锁相放大原理图：输入信号将分别与参考信号及其 90° 相移信号相乘。混频器输出经过低通滤波后，将滤除噪声和 2ω 分量，并最终转化为极坐标。

在典型实验中，通常利用正弦波激励待测设备 (DUT)，如 Figure 2 所示。锁相放大器将利用设备响应信号 $V_s(t)$ 和参考信号 $V_r(t)$ 来确定幅值 R 和相位 θ 。这一过程通过 Figure 2 (b) 中所示的双相解调

电路实现。输入信号将被分出两路，并分别与参考信号及其 90° 相移信号相乘。混频器的输出信号经可调低通滤波器滤波，得到 X 和 Y 两个输出，分别称为同相分量和正交分量。通过下列公式将 X 和 Y 笛卡尔坐标转换为极坐标，即可轻松得到幅值 R 和相位 θ 。

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1)$$

$$\theta = \arctan(Y, X) \quad (2)$$

如 Figure 2 (b) 所示，为了以两个不同相位解调输入信号，锁相放大器需要将输入信号进行拆分。相比于模拟仪器，利用数字技术拆分信号可以避免任何 SNR 损失和通道间失配问题。

2.2 时域中的信号混频

将输入信号 $V_s(t)$ 改写为复平面上两个矢量之和，两个矢量长度为 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ ，以相同角速度 ω_s 分别沿顺时针方向和逆时针方向旋转：

$$V_s(t) = \sqrt{2}R \cdot \cos(\omega_s t + \theta) = \frac{R}{\sqrt{2}e^{i(\omega_s t + \theta)}} + \frac{R}{\sqrt{2}e^{-i(\omega_s t + \theta)}} \quad (3)$$

通过 Figure 3 (a) 和 (b) 的图示可以看出，两个矢量在 x 轴的投影之和（实部）正是 $V_s(t)$ ，而矢量在 y 轴的投影之和（虚部）始终为零。

双相下混频过程在数学上可以表示为输入信号与复数参考信号相乘

$$V_r(t) = \sqrt{2}e^{-i\omega_r t} = \sqrt{2}\cos(\omega_r t) - i\sqrt{2}\sin(\omega_r t) \quad (4)$$

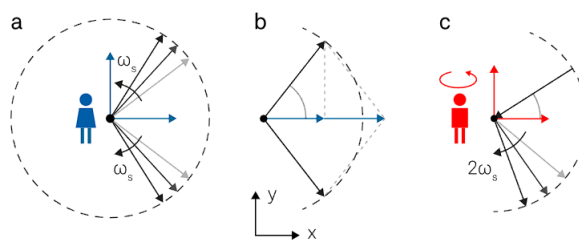


图 3: 在复平面中表示的解调过程。(a) 输入信号 $V_s(t)$ 可表示为两个反向旋转的矢量之和。(b) 矢量在实轴 x 轴上的投影彼此叠加，而在虚轴 y 轴上的投影则相互抵消。(c) 在旋转坐标系中，逆时针方向矢量保持静止，顺时针方向矢量以观察者两倍的角度速度旋转。请注意，依照惯例，如果逆时针方向矢量在参考信号之前，则 θ 为正值。

混频后的复数信号可以利用下面的公式算出， $\exp(i\omega_s t) \equiv \cos(\omega_s t) + i\sin(\omega_s t)$ 计算得出：

$$\begin{aligned} Z(t) &= X(t) + iY(t) = V_s(t) + V_r(t) \\ &= R[e^{i[(\omega_s - \omega_r)t + \theta]} + e^{-i[(\omega_s + \omega_r)t + \theta]}] \end{aligned} \quad (5)$$

以信号频率与参考频率的和频及差频信号分量表示。在 Figure 3 (c), 复数混频相当于观察者位于原点并以 ω_r 频率沿逆时针方向旋转。

从观察者角度看，两个箭头分别以 $\omega_s - \omega_r$ 和 $\omega_s + \omega_r$ 的不同角速度旋转，如果信号频率接近参考频率，角速度为 $\omega_s + \omega_r$ 的箭头会旋转得快得多。

解调后的平均信号为

$$Z(t) = R \cdot e^{i[(\omega_s - \omega_r)t + \theta]} \quad (6)$$

如果信号同频 $\omega_s = \omega_r$ ，则该公式可进一步简化为

$$Z(t) = R \cdot e^{i\theta} \quad (7)$$

Equation 7 代表解调后的信号和锁相放大器主要输出：绝对值 $|Z| = R$ 为信号的均方根幅值，参数 $\arg(Z) = \theta$ 为输入信号相对于参考信号的相位。

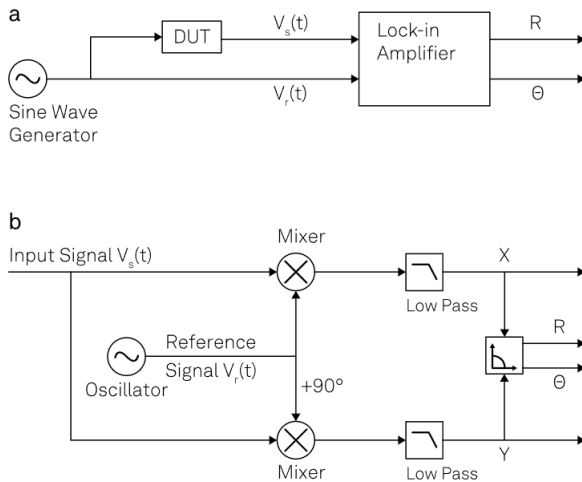


图 4: (a) 峰值为 0.5V 的输入信号 V_s (红色) 与同频参考信号 V_r (蓝色) 相乘。(b) 产生的信号将带有 V_s 和 V_r 频率的频率分量。直流偏移量为 0.17V，是输入信号的同相分量 X 。(c) 输入信号 V_s 与非同频参考信号 V_r 相乘。(d) 产生的信号将带有一个直流偏移量和两倍于 $f_s - f_r$ 和 $f_s + f_r$ 频率的频率分量。平均信号始终为零。

解调信号 $Z(t)$ 的实部和虚部分别为同相分量 X 和正交分量 Y 。这两个分量可通过欧拉公式

$$X = \text{Re}(Z) = \langle V_s(t) \cos(\omega_s t) \rangle = R \cos \theta \quad (8)$$

$$Y = \text{Im}(Z) = -\langle V_s(t) \sin(\omega_s t) \rangle = R \sin \theta \quad (9)$$

图中所示， $\omega_s = \omega_r$ 意味着逆时针旋转的箭头看起来静止不动。而另一个箭头则以两倍角频率 $-2\omega_s$ 顺时针旋转，这通常称为 2ω 分量。低通滤波器通常会将 2ω 分量完全滤掉。

Figure 4 为示波器显示的混频和滤波前后的不同信号。Figure 4 所示为一段时间的正弦信号示例 V_s 和 V_r ，两信号频率相同，分别为 ω_s 和 ω_r 。Figure 4 (b) 中的蓝线为混频后信号，主要为 2ω 分量。滤波后 (绿线)，仅保留直流分量，其值等于 V_s 的同相幅值 X 。如 Figure 4 (c) 所示，如果信号频率与参考频率不同，则混频后的信号不再是简单的正弦波，并且滤波后的平均值始终为零，如 Figure 4 (d) 所示。这是一个典型的同步检测示例，检测中仅提取出与参考频率具有相干关系的信号，滤除了所有其他信号。

2.3 频域中的低通滤波

研究低通滤波时，我们优先考虑使用频域，因为大多数滤波器的输入信号 $Q_{in}(\omega)$ 与滤过信号 $Q_{out}(\omega)$ 之间存在如下的简单关系：

$$Q_{out}(\omega) = H(\omega)Q_{in}(\omega) \quad (10)$$

为了完全滤除频谱中不需要的部分，我们可能会想要找到一种理想的滤波器，来完整传递 f_{BW} (即通带) 内的所有频率，并彻底滤除任何其他频率 (即阻带)。然而遗憾的是，这样理想化的“矩形滤波器”根本不可能实现，因为这种滤波器的脉冲响应在时域内从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$ ，会使得滤波器具有非因果性。我们用 RC 滤波器模型作为基本近似，请参见 Figure 6。这种类型的滤波器在模拟域和数字域均容易实现。模拟 RC 滤波器的传递函数可以用以下公式近似表示

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \quad (11)$$

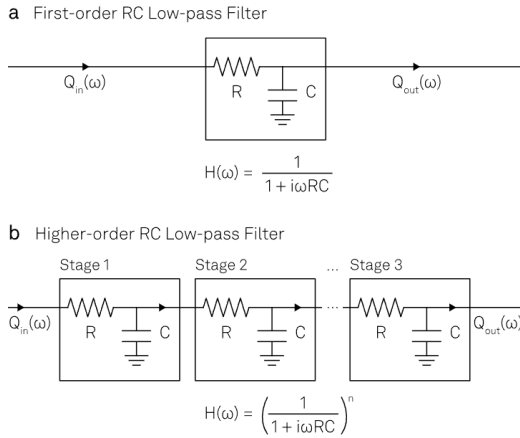


图 5: (a) 一阶 RC 滤波器及其传递函数公式。(b) 通过将多个 RC 滤波器级联可以针对更高频率获得更陡的滚降特性。最终的传递函数为各滤波器传递函数相乘。

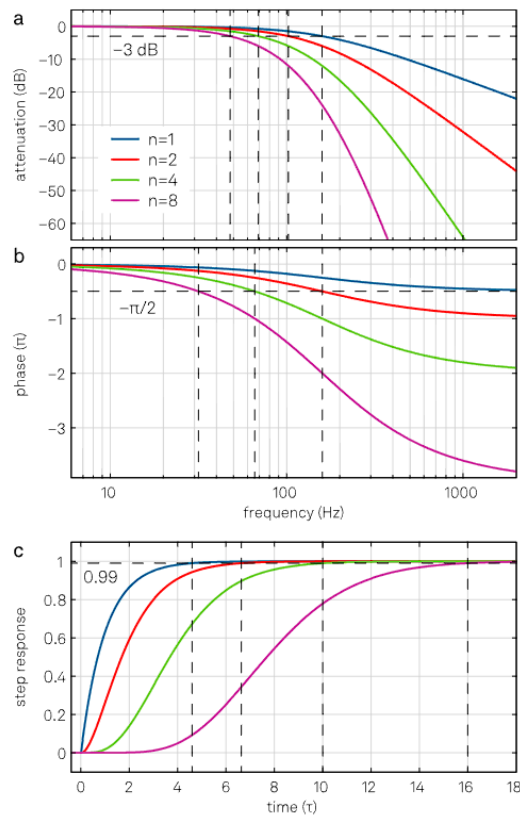


图 6: 蓝线为 RC 滤波器传递函数 $H(\omega)$ 的波特图。同时, 还绘制了具有相同滤波时间常数 τ 的高阶滤波器 ($n = 2, 4, 8$) 的传递函数, 从图中可以看出, 高阶滤波器的信号带宽 f_{-3dB} 相对要低得多。(c) 时域中对应的阶跃响应函数。通过级联多个滤波器, 可以显著增加达到同一精度的稳定时间。这与相位延迟的增大 (从 (b) 中可以看出) 有关。级联 RC 或积分滤波器的另一个优点是, 不会出现巴特沃斯滤波器等其他类型滤波器中存在的时域内超调问题。

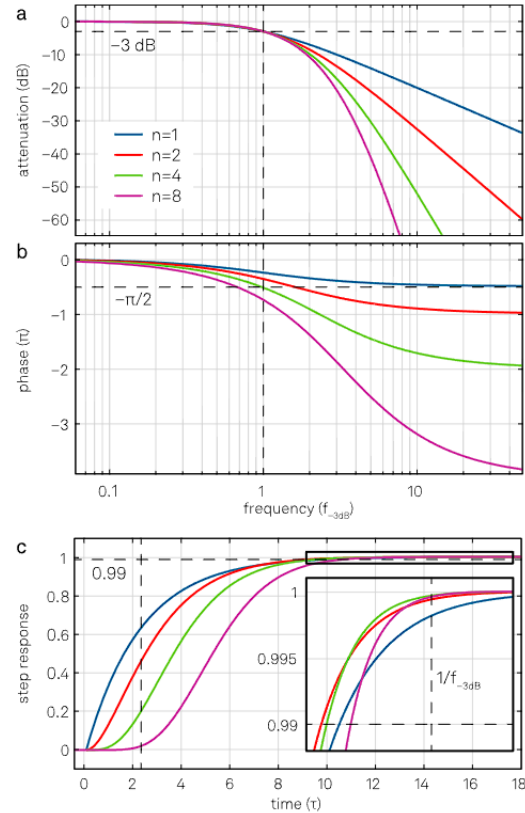


图 7: 与 Figure 7 相同的一组图表, 但 Figure 8 中所有滤波器的截止点 f_{-3dB} 相同, 而时间常数不同, 分别为 $\tau = 0.16, 0.10, 0.069, 0.048$ 。(a) 高阶滤波器针对更高频率的滚降更陡。(b) 高阶滤波器的相位延迟更大, 会对反馈应用造成不良影响。(c) 时域内的阶跃响应函数, 以一阶滤波器时间常数 τ 为单位。尽管低阶滤波器在初始时对输入信号变化的响应更为迅速, 但这个优势会随着时间的推移而逐渐减小, 在某一时间点, 高阶滤波器甚至会超越低阶滤波器, 如插图所示。

3 信号动态特性和解调带宽

设置解调带宽时, 往往需要在时间分辨率与 SNR 之间进行权衡。以载波频率 $f_c = \omega_c/2\pi$ 的调幅 (AM) 输入

$$V_s(t) = [1 + h\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_c t + \phi_c) \quad (12)$$

信号 (如 Figure 9 所示) 为例, 探讨如何能够满足不同实验问题的要求。在 Figure 9 中, 以蓝线表示信号幅值 $R(t) = 1 + h\cos(\omega_m t)$, 信号以 $f_m = \omega_m/2\pi$ 的频率围绕平均值 1 进行调制, 其中调制指数 h 表征调制强度。在本例中, 载波频率和调制频率分别选为 $f_c = 2kHz$ 及 $f_m = 100Hz$ 。

采用 Figure 3 中引入的复数表示方法, Figure 10 (a) 展示了混频后的 AM 信号。信号的模 $|1 + h\cos(\omega_m t)|$ 与时间相关, 但其角度 ϕ_c 恒定。 $\cos(\omega_m t)$ 项是两个反向旋转矢量 $\exp(i\omega_m t)$ 与 $\exp(-i\omega_m t)$ 之和。这两个矢量表示调幅信号频谱的上边带和下边带, 如 Figure 10 (d) 所示。 Figure 10 (b) 和 (c) 分别显示了正交分量和同相分量。

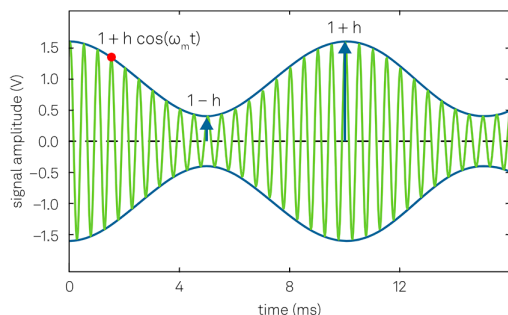


图 8: 调幅信号——绿线表示载波输入信号 (为便于说明, 以较低频率显示)。蓝线表示信号幅值, 为输入信号包络。

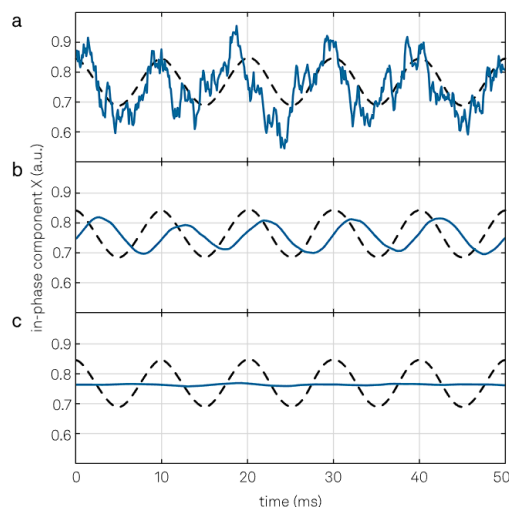


图 10: (a) 含噪声的输入信号将生成含噪声的解调信号 (蓝线)。无噪声的基底信号如图中黑色虚线所示。(b) 使用带宽 $f_{-3dB} = f_m = 100$ Hz 的滤波器将滤除大部分噪声, 但也会影响被测信号。(c) 与 (b) 类似, 但带宽 $f_{-3dB} = f_m/5 = 20$ Hz。

4 发展现状

自 20 世纪 30 年代初问世以来, 锁相放大器经历了长期发展。从真空管被取代开始, 锁相放大技术已经完全过渡到数字领域转换。在数字锁相放大器中, 输入信号通过模数转换器 (ADC) 转换至数字域, 然后通过数字信号处理技术 (DSP) 以数字化方式执行后续步骤, 如 Figure 13 (b) 所示。相比之下, 模拟锁相放大器则使用压控振荡器、混频器和简单的 RC 滤波器等模拟元件进行信号处理。此外, 还存在混合使用模拟和数字方式进行信号处理的方案 [12] (如 Figure 13 (a) 所示), 在这种方案中, 将在模拟混频阶段 (滤波前或滤波后) 后对信号进行数字化处理。

随着速度、分辨率和线性度不断提升的 ADC 和 DAC 推向市场, 进一步促进了模拟领域向数字领域的转换。这一进展有助于将频率范围、输入噪声和动态储备推向新的极限。此外, 对于数字信号处理, 出现因信号通路不匹配而导致的误差、串扰和因温度变化等原因而导致的漂移等情况的几率将大大降低。这一特性在频率较高时尤为重要。但数字处理方案的最大优势在于, 能够采用多种方式同时对信号进行分析而不损失 SNR。如前文所述, 这不仅有助于提高双相解调性能, 还支持直接分析

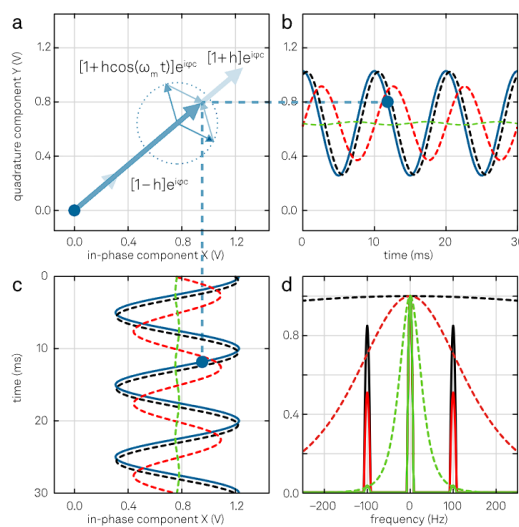


图 9: (a) 旋转参考坐标系内的调幅信号是一个长度与时间相关的矢量。瞬时信号由蓝色粗箭头表示; 较窄的箭头表示 AM 信号的两个边带。(b) 和 (c) 展示了解调输入信号的正交分量和同相分量: 蓝线为未经滤波的信号, 黑色虚线、红线和青色线分别表示以 $f_{-3dB} = 500$ Hz、100 Hz 和 20 Hz 的滤波器进行滤波后的信号。(d) 以带宽不同的三种滤波器进行滤波后的解调信号频谱 (黑色、红色和青色曲线)。

信号的多个频率分量而无需级联多台仪器，从而避免了可能带来的所有不利影响。

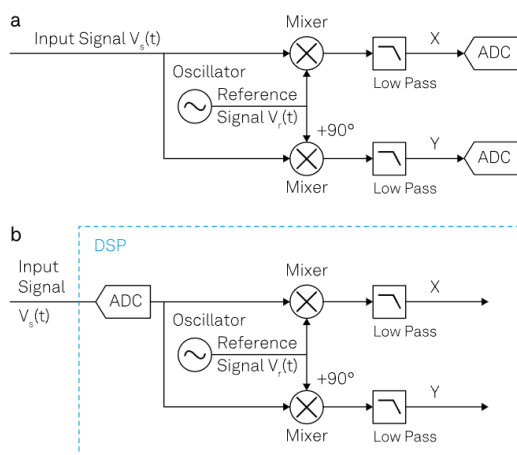


图 11: (a) 模拟锁相放大器: 信号分两条路径处理, 在两条路径中, 都是先与参考信号混频, 经滤波后再转换为数字信号。(b) 数字锁相放大器: 信号经数字化后与参考信号相乘并进行滤波。

从模拟领域向数字领域转换后, 运算能力强、内存足和速度高的现场可编程门阵列 (FPGA) 推向市场, 它的出现为推动创新迈出了一大步。通过对 FPGA 灵活编程即可实时执行几乎所有所需的信号处理任务。锁相技术的自然延伸是在解调前后增加时域与频域分析, 否则将由单独的示波器和频谱分析仪完成分析。此外, 单台仪器内可以包含用于对低占空比信号进行分析的 Boxcar 平均器、用于反馈回路的 PID 和 PLL 控制器以及用于实时处理测量数据的运算单元。随后, 可以将测量信号传输至计算机进行进一步分析。如果需要采用连接另一台仪器的模拟接口, 可以使用高分辨率 DAC 将来自不同功能单元的测量数据轻松转换回模拟域。

参考文献

- [1] C. R. Cosens. A balance-detector for alternating-current bridges. *Proceedings of the Physical Society*, 46:818, 1934.
- [2] W. C. Michels. A Double Tube Vacuum Tube Voltmeter. *Rev. Sci. Instrum.*, 9:10, 1938.
- [3] W. C. Michels and N. L. Curtis. A Pentode LockIn Amplifier of High Frequency Selectivity. *Rev. Sci. Instrum.*, 12:444, 1941.
- [4] Interview of Robert Dicke by Martin Hawrit.Niels Bohr Library and Archives, College Park, MD: American Institute of Physics, www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/4572, 1985. Accessed: 2023-03-29.
- [5] Zurich Instruments MFLI. <https://www.zhinst.com/products/mfli-lock-in-amplifier>. Accessed: 2023-03-29.
- [6] A. M. Skellett. The Coronaviser, an Instrument for Observing the Solar Corona in Full Sunlight. *Proc Natl Acad Sci USA*, 26(6):430, 1940.
- [7] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gosard. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1559, 1982.
- [8] L. Gross et al. Bond-Order Discrimination by Atomic Force Microscopy. *Science*, 337(6100):1326, 2012. 9Stanford Research SR844. <http://www.thinksrs.com/products/SR844.htm>. Accessed: 2023-03-29.