量子计算实验

廖荣
中国科学技术大学 物理学院, 合肥 230026
合肥国家实验室，合肥 230088

1 实验原理

1.1 量子比特

量子比特是量子计算机中的信息单元，其处于 0 与 1 的叠加态

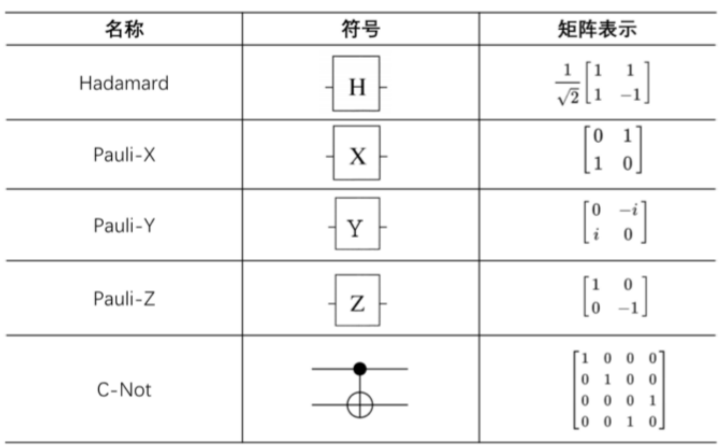
$$\psi = \alpha 0 + \beta 1 \tag{1}$$

因为这个态是归一化的，我们也可以将其写为

$$\psi = \cos\frac{\theta}{2}0 + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}1 \tag{2}$$

这个态实际上存在在空间 CP^1 上，而 $CP^1 \cong S_2$，这个球面便是 Broch 球。单个量子比特的纯态可以和布洛赫球上的点一一对应。

1.2 量子逻辑门



名称	符号	矩阵表示
Hadamard	H	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$
Pauli-X	X	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$
Pauli-Y	Y	$\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}$
Pauli-Z	Z	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
C-Not		$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

图 1: 常用量子逻辑门的符号和矩阵表示

控制单个逻辑门的矩阵须是幺正矩阵，理论上可以证明，对于任意的多比特量子逻辑门，都可以通过两比特受控非门结合单比特量子逻辑门的方式实现。我们称单比特量子逻辑门和受控非门形成一组普适的量子逻辑门。

1.3 量子测量

可以用量子比特的正交特征矢对结果进行测量，常选取的基矢为

$$1,0 \qquad + = \frac{1}{\sqrt[root]{2}}(0+1), - = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-1) \tag{3}$$

1.4 量子测量

对于生活在 $\{0,1\}^n$ 上的函数，有两种输出情况：只输出 0 或 1，称为常函数; 对一半输入输出 0，一半输入输出 1，称为平衡函数。用一般的算法需要至多 $2^{n-1}+1$ 次计算，但使用 Deutsch-Jozsa 算法只需要一次。输入量子态为 01，对两个量子比特分别施加 Hadamard 门，得到

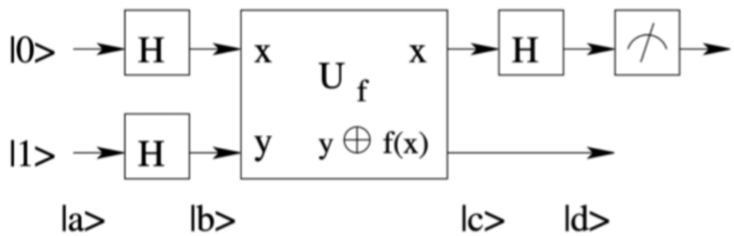


图 2: Deutsch 算法

$$b = \left(\frac{0+1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \tag{4}$$

对 b 施加逻辑门 $\mathcal{U}_f$

$$\mathcal{U}_f = x, y \oplus f(x) \tag{5}$$

$y \oplus f(x)$ 表示 $y + f(x)$ 除以 2 的余数，因此有

$$\begin{cases} x, 0 = x, f(x) \\ x, 1 = x, 1 - f(x) \end{cases} \tag{6}$$

所以

$$x\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) = x\left(\frac{f(x) - 1 - f(x)}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^{f(x)} x \left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \tag{7}$$

考察第一个量子比特，如果是常函数，则为 $\left(\frac{0+1}{\sqrt{2}}\right)$, 如果是平衡函数则为 $\left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right)$。然后对第一个量子比特施加 Hadamard 门，如果是常函数

$$d = \pm 0 \left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \tag{8}$$

如果是平衡函数则为

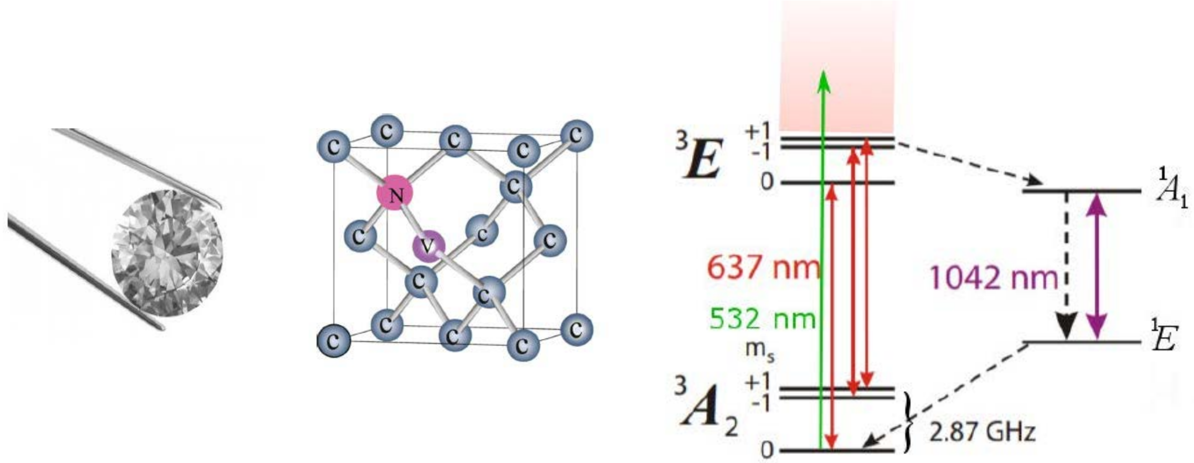
$$d = \pm 1 \left(\frac{0-1}{\sqrt{2}}\right) \tag{9}$$

用 0 对第一个量子比特进行测量，如果结果是 1，则是常函数，结果是 0 则为平衡函数。

2 实验方法

2.1 NV 色心

NV（Nitrogen-Vacancy）色心是金刚石中的一种点缺陷。金刚石晶格中一个碳原子缺失形成空位，近邻的位置有一个氮原子，这样就形成以了一个 NV 色心。NV 色心的基态为三重态，并且会在激光的照射下跃迁到磁量子数为 0 的态，故可以将 $m_s = 0$ 的态选作量子比特基态。



2.2 自旋态操控

使用自旋磁共振技术对自旋态进行操控。spin-1/2 的电子在外磁场中的哈密顿量为

$$\hat{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B_0} \tag{10}$$

而磁矩与自旋算符的关系为

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S} = \gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \tag{11}$$

取磁场为 z 轴方向，则

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \gamma B_0 & 0 \\ 0 & -\gamma B_0 \end{pmatrix} := -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

记自旋初态为 $\psi_0 = a_0 0 + b_0 1$□ 其随时间的演化为

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{13}$$

如果设 $|a_0| = \cos(\alpha/2), |b_0| = \sin(\alpha/2)$，可以得到

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\alpha \tag{14}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\alpha \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \tag{15}$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin\alpha \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \tag{16}$$

这表示自旋随着时间进动，现在考虑一个圆偏振的磁场

$$\begin{cases} B_x = B_1 \cos \omega t \\ B_y = B_1 \sin \omega t \end{cases} \tag{17}$$

代入薛定谔方程可以得到 t>0 时刻自旋向上的概率为

$$P_\uparrow = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \delta t \tag{18}$$

其中

$$\delta = \sqrt{\omega^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \tag{19}$$

通过这一过程我们可以实现自旋的拉比震荡，当 $\omega_1 t = \pi$ 时，量子比特由 $|0\rangle$ 完全跃迁至 $|1\rangle$，实现非门；当 $\omega_1 t = \pi$ 时，量子比特调制为 $|0\rangle \to \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

2.3 实验装置

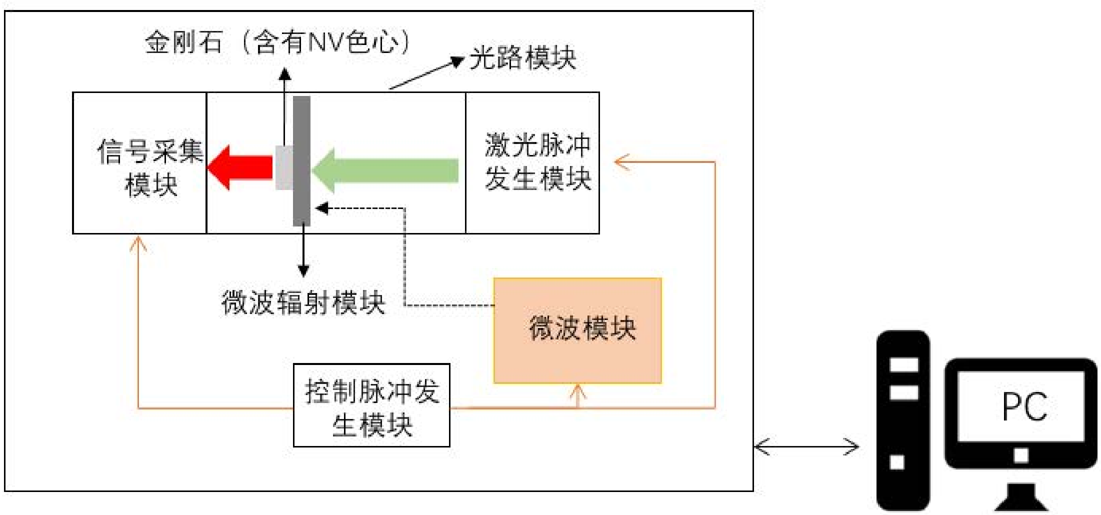


图 3: 实验装置图

3 实验内容和结果

3.1 连续波实验

NV 色心的自旋态能够被激光初始化，并且发出荧光的亮度是依赖于自旋状态的。施加微波到色心上，可以改变自旋在 $|m_s = 0\rangle$ 态和 $|m_s = \pm 1\rangle$ 态的布居，从而改变荧光强度。因为 NV 色心的荧光亮度是依赖于自旋态的。改变施加的微波频率，当共振的微波改变了自旋状态，荧光亮度会相应的发生改变。因此，当微波频率与能级间隔共振时，谱线上会出现低谷。

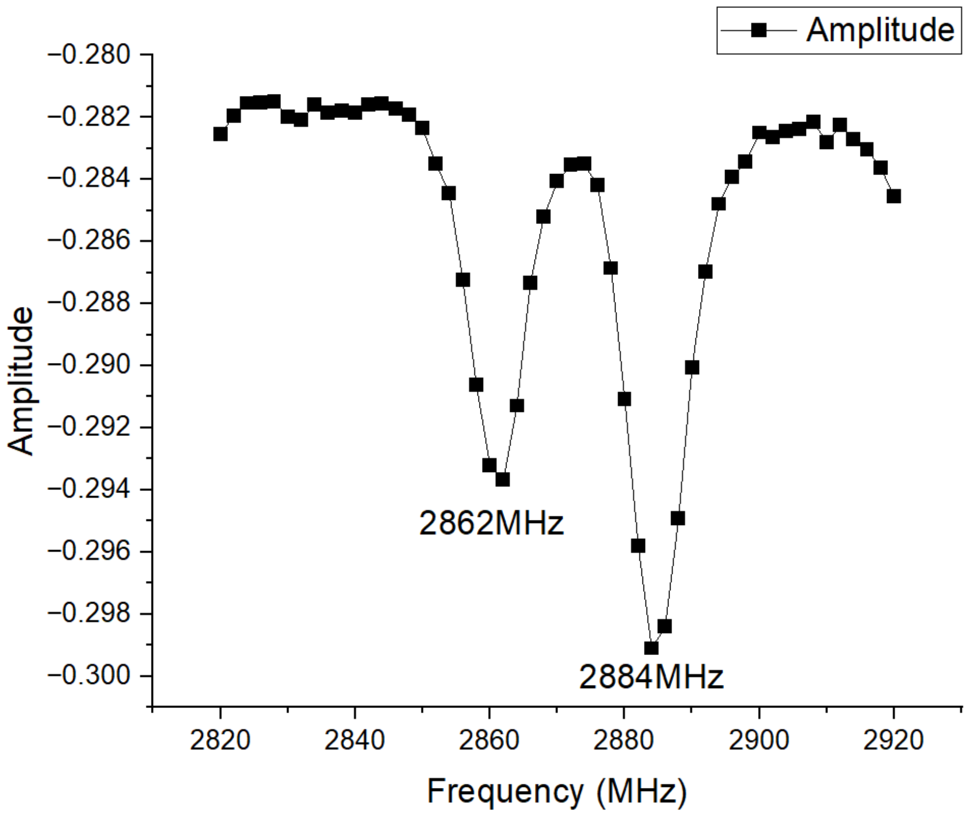


图 4: 连续波实验

得到两个共振频率为 2862Hz 和 2884Hz。

3.2 拉比振荡实验

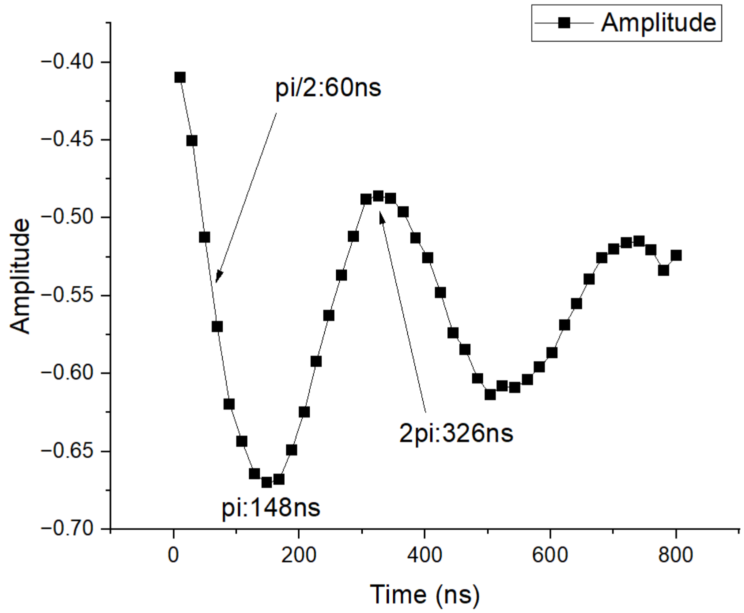


图 5: 2862MHz 的拉比振荡实验

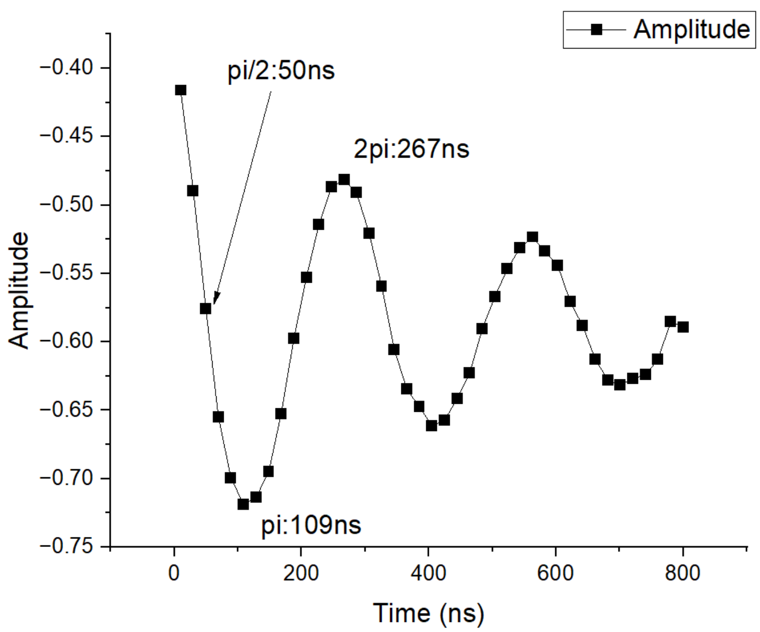


图 6: 2884MHz 的拉比振荡实验

	2862MHz	2884MHz
$\frac{\pi}{2}$	60ns	50ns
π	148ns	109ns
2π	326ns	267ns

3.3 回波实验

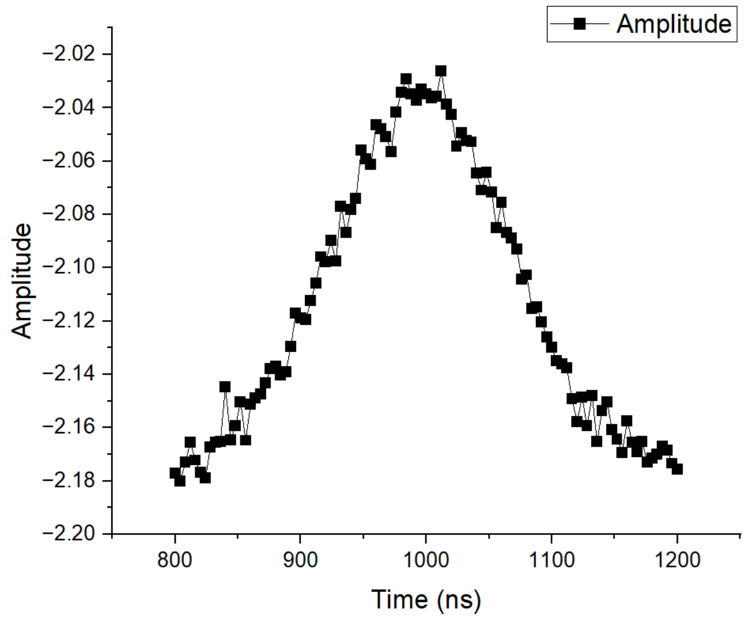


图 7: 2884MHz 的回波实验

回波波峰出现在 1000ns 处，与设置的 $t1 = 1000ns$ 符合。

3.4 T_2 实验

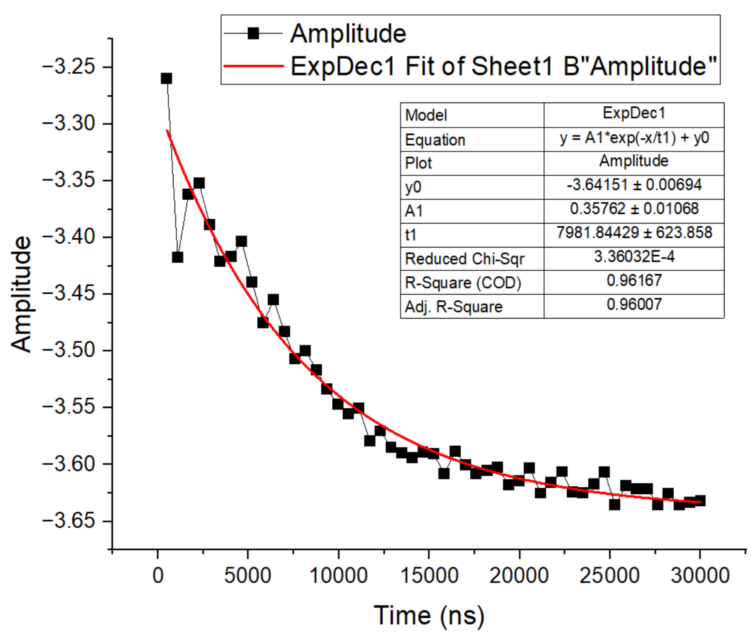


图 8: 2884MHz 的 T2 实验

利用指数衰减拟合得到 $T_2 = 7982ns$。

3.5 DJ 算法实验

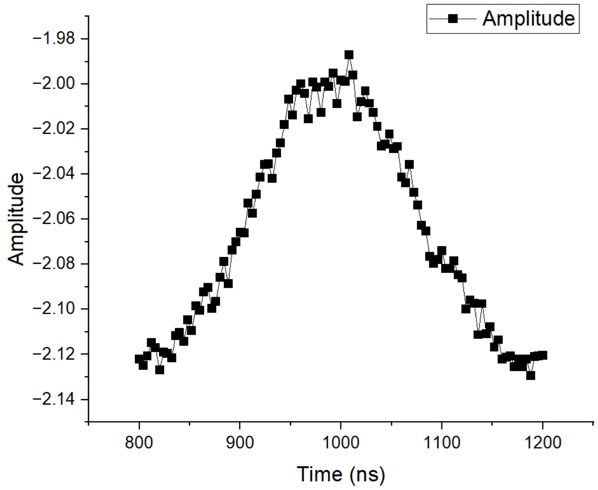


图 9: DJ1

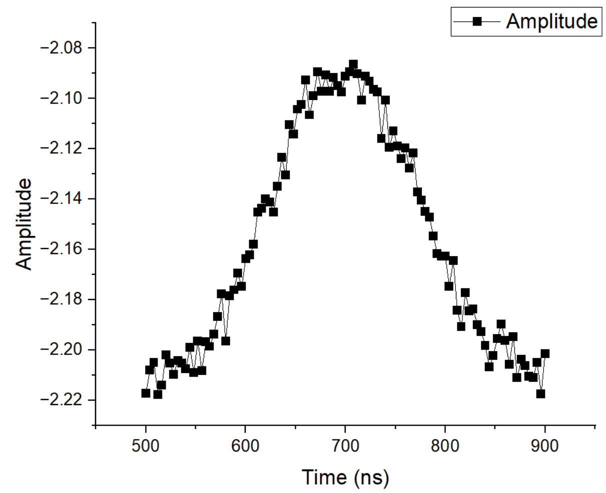


图 10: DJ2

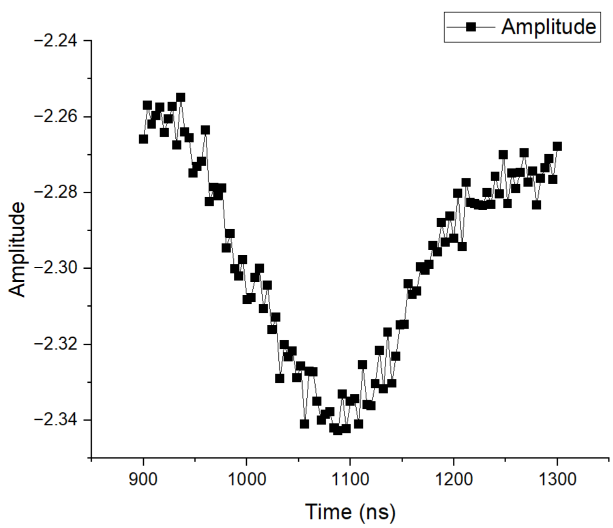


图 11: DJ3

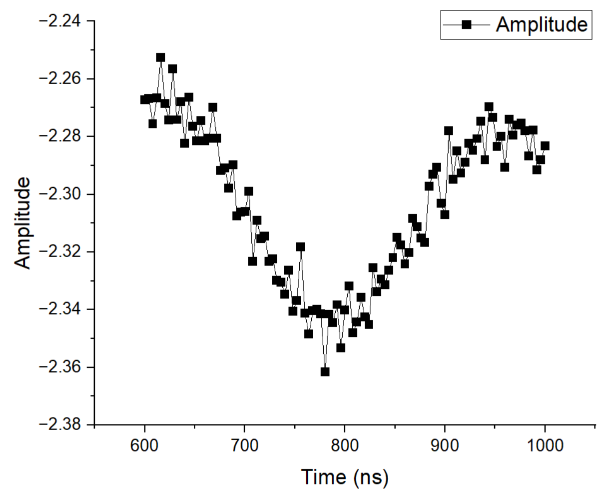


图 12: DJ4

$$U_{f1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x)=0 \qquad U_{f3}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x)=x$$

$$U_{f2}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x)=1 \qquad U_{f4}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x)=1-x$$

图 13: 实验中用到的不同函数/矩阵

通过回波方向可以判断出 f_1 和 f_2 是常函数，f_3 和 f_4 是平衡函数。

4 思考题

4.1 请用布洛赫球表示以下态

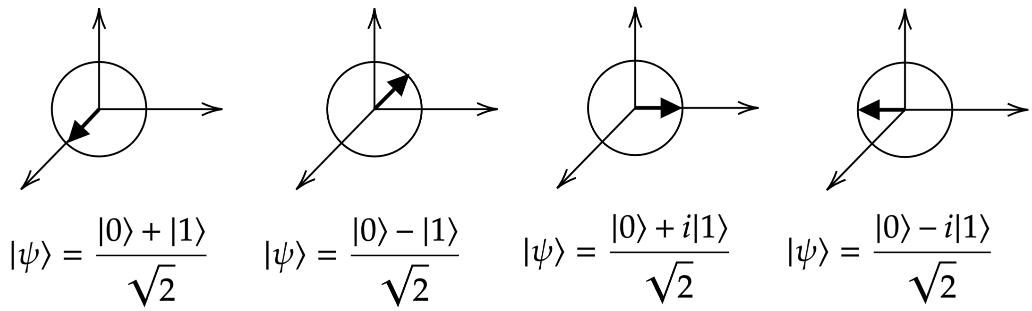


图 14: DJ4

4.2 如果实验中施加的微波频率 f 与共振频率 f_0 有偏差，即 $f = f_0 + \delta f$，拉比振荡的频率会如何变化？

拉比振荡的频率会增加。

4.3 拉比振荡频率与微波功率的关系是什么？

拉比振荡的频率可以表示为:

$$\Omega_R = \frac{\gamma}{2} B_1$$

γ 是自旋的旋磁比，B_1 是微波场的振幅。可见，拉比振荡的频率与微波场的振幅成正比。
而微波功率与微波场的振幅有关，可以表示为:

$$P = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 A$$

E_0 是微波场的电场强度，A 是微波场的截面积。可见，微波功率与微波场的振幅的平方成正比。
因此，拉比振荡频率与微波功率之间的关系可以表示为:

$$\omega_R \propto \sqrt{P}$$

即拉比振荡频率与微波功率的平方根成正比。

4.4 参照 n=1 的特殊情况，即图 1.5 所示的量子线路图，画出一般情况的 D-J 算法量子线路图，并解释算法原理

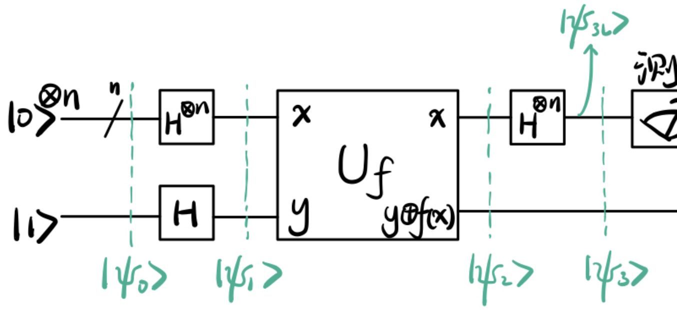


图 15: DJ 算法量子线路图

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= (H|0\rangle^{\otimes n})(H|1\rangle)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^n}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\otimes\cdots\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}.\\
|\psi_2\rangle &= U_f|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}|x\rangle(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

$$
|\psi_{3L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}H|x\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}\sum_{z\in\{0,1\}^n}(-1)^{\sum_i x_i z_i}|z\rangle.
$$

对其做测量，得到

$$
\langle\psi_{3L}|0\rangle\langle 0|\psi_{3L}\rangle = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}\right)^2,
$$

当 $f(x)$ 是常函数时，测量结果为 1；当 $f(x)$ 是平衡函数时，测量结果为 0。