练习题1.1

January 21, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.1.1 反证法。设$r=\frac{m}{n}$是有理数，w是无理数。
若$r+w=\frac{p}{q}$，则$w=\frac{p}{q}-\frac{m}{n}=\frac{pn-qm}{qn}$为有理数，与题设相悖
联系“有理数域”的概念，即加减乘除四则运算封闭，用反证法。

1.1.2 根据“对任意实数，总有$r_n\to x$”，仿照本节的方法构造一个有理数列$\frac{p}{q}<\frac{r_1+r_2}{2}<\frac{p+1}{q}$ $q\to\infty$即得证；
利用此有理数列和例1的结论构造$p<\sqrt{p^2+1}<p+1$无理数列（当q充分大时，p也充分大）即得证。

1.1.3 反证法。$\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}$ 于是$m^3=2n^3$,利用奇偶性：m为偶数则 $m^3=(2p)^3=2n^3$ ，$4p^3=n^3$ n也为偶数；
而$\frac{m}{n}$ 约分为最简形式后不可能都为偶数。

1.1.4 反证法。利用例1的结论，$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$不是完全平方数，即得证。

1.1.5 (0,0)是有理点。反证法。直接展开，$x^2-2\sqrt{2}x+y^2=0$，按照第1题结论，上式左边是无理数，而右边是零。

1.1.6 当$ab\le 0$时，取等号；当$ab>0$时，$||a|-|b||<\max(|a|,|b|)<|a|+|b|=|a+b|$。

1.1.7 a，b符号相同，则$\frac{a}{b}>0$。

1.1.8 数轴上，x到-1的距离小于其到1的距离。

1.1.9 归纳法。$n=2$时成立，设$|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$，于是

$$|\sum_{i=1}^{n}a_i|=|\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}|\leqslant|\sum_{i=1}^{n}a_i|+|a_{n+1}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|+|a_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|$$

1.1.10 按$a<b,a>b,a=b$讨论即证。
$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$表示从$a,b$的中点出发，向前（数轴正向）一半的$a,b$间距，正好是$a,b$中较大者。
$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$表示从$a,b$的中点出发，向后（数轴负向）一半的$a,b$间距，正好是$a,b$中较小者。

1.1.11 证明：

$$m\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant M$$

$$b_im\leqslant a_i\leqslant Mb_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n}b_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant M\sum_{i=1}^{n}b_i$$

因为$b_1, b_2, \cdots, b_n$都是正数，$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i > 0$,所以

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M$$

1.1.12　归纳法。$n=2$显然；设$(1+x)^n > 1+nx$,又$x > -1$,则

$$(1+x)^n (1+x) > (1+nx)(1+x) > 1 + (n+1)x$$

1.1.13　由对称性，只需考察$0 \leqslant x < y$，原式等价于

$$x^m (y^n - x^n) + y^m (x^n - y^n) \leqslant 0$$
$$(x^m - y^m)(y^n - x^n) \leqslant 0$$

练习题1.2

January 24, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.2.1 直接证明；

任意有理数$\frac{p}{q}$，对于确定的q，可按其除q的余数将整数分成q类；由除法过程，进位后的被除数必然属于某一同余类，从而至多经过q次，余数就会重复出现，所以$\frac{p}{q}$不是有尽小数就是无尽循环小数；

任意无尽循环小数$a = 0.\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_n$，则$a \times 10^{-n} = 0.\underbrace{0\cdots 0}_{n\text{个}0}\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_n$，两式相减得$a \times \frac{10^n - 1}{10^n} = 0.a_1 \cdots a_n$，于是$a = \frac{\overline{a_1 \cdots a_n}}{10^n - 1} = \frac{\overline{a_1 \cdots a_n}}{\underbrace{9\cdots 9}_{n\text{个}9}}$为有理数。

1.2.2 实数$\overset{一一对应}{\Longleftrightarrow}$长度$\overset{一一对应}{\Longleftrightarrow}$无尽小数（公理）

由上题有理数 $\Longleftrightarrow$ 循环小数（有尽小数看做0循环），故无理数 $\Longleftrightarrow$ 无尽不循环小数。

1.2.3 $0.24999\cdots = 0.25 = \frac{1}{4}$，$0.\dot{3}7\dot{5} = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$，$4.\dot{5}1\dot{8} = 4\frac{518}{999} = 4\frac{14}{27} = \frac{122}{27}$

注意$0.\dot{9} = 1$，可用极限来定义无尽不循环小数。

1.2.4 反证法；

无尽不循环的性质很明显，对任意固定的n，总可以有连续n位是0，也可以有连续n位是1，于是只要假设存在循环节，总能找出反例。

1.2.5 （1）反证法；

若$s \neq 0$，则$\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$为有理数（注意有理数域的概念，习题1.1）；

（2）设法化为（1）的情况；

平方，$r + s\sqrt{2} = -t\sqrt{3}$，$\left(r + s\sqrt{2}\right)^2 = \left(-t\sqrt{3}\right)^2$。

1.2.6 归纳法；

$$\begin{aligned}(1+a_1)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) &> (1+a_1+\cdots+a_n)(1+a_{n+1}) \\ &= 1 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1}\end{aligned}$$

条件$a_1, a_2, \cdots, a_n$同号使得上式$\sum$中各项均为正。

1.2.7　从结论出发；

直接应用上题结论，两式右边即得证；观察（1）式左边恰是（2）式右边的倒数，若$\frac{1}{\prod(1-a)} > \prod(1+a)$即得证；而

$$\prod(1-a)\prod(1+a) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-a_i^2\right) < 1$$

练习题1.2

January 24, 2013

1　第一章 实数和数列极限

1.1　数轴

1.2　无尽小数

1.3　数列极限

1.3.1　“$\varepsilon - N$”

（1）$\frac{1}{1+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$，取$n > \frac{1}{\varepsilon^2}$

（2）$\frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$，取$n > \frac{1}{\varepsilon}$

（3）原式单调递减，故可取$2n$，$\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} < \frac{n^n(2n)^n}{(2n)^{2n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$，**由例3知可取**$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}$

（4）$|\frac{(-1)^{n-1}}{n}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$，取$n > \frac{1}{\varepsilon}$

（5）$|\frac{2n+3}{5n-10} - \frac{2}{5}| = |\frac{7}{5n-10}| < \varepsilon$，取$n > \frac{1}{5}\left(\frac{7}{\varepsilon} + 10\right)$

（6）$|0.9\cdots 9 - 1| = 10^{-n} < \varepsilon$，取$n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 10}$

（7）$|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} - \frac{1}{2}| = |\frac{(n+1)n}{2n^2} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$，取$n > \frac{1}{2\varepsilon}$

（8）$|\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} - \frac{1}{3}| = |\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{1}{3}| = \frac{3n^2+n}{6n^3} < \frac{3n^2+n^2}{6n^3} = \frac{2}{3n} < \varepsilon$，取$n > \frac{2}{3\varepsilon}$

（9）$|\arctan n - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon$，$\arctan n > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$，取$n > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$

（10）$\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\arctan n}{2} = \frac{n^2\arctan n}{n^2+n^2} \leqslant \frac{n^2\arctan n}{1+n^2} < \arctan n < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$，取$n > \max\left\{\tan(\pi - 2\varepsilon), \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right\}$

1.3.2　按定义；

$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$，即得证；逆命题不成立，如$a_n = (-1)^n$

1.3.3　按定义；

取$\varepsilon = \frac{1}{2}$，若$k \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，则$k - 1 < A - \varepsilon < k < A + \varepsilon < k + 1$，则$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$中不含其它整数。

1.3.4　按定义重新叙述即可；

（1）不能；如$\{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$**即**$a_n = (-1)^n$，**取**$a = 1$

（2）不能；如$\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots\right\}$即$a_n=\frac{1}{2}\left(-1\right)^n$，取$a=0$

（3）可以；极限定义中任意正数ε的“任意”强调的是任意小，$\varepsilon<1$约束不起作用；

（4）可以；$\frac{1}{k}<\varepsilon$，$\frac{1}{k}$本身是无穷小（$k\to\infty$）

（5）可以；即从某项起，后面各项全在$(a-\varepsilon,a+\delta)$中，取$\varepsilon=\min\left\{\varepsilon,\delta\right\}$即可。

1.3.5　对于数列$\{a_n\}$，有$\varepsilon_0>0,$使得$\forall n\in N^*,\exists n_0>n,s.t.\ |a_n-a|>\varepsilon_0$
或者说$\{a_n\}$有无限项在区间$(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$以外。

1.3.6　从结论出发（观察法）；或利用递推公式；
（1）整理条件易得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c$$

暂不考虑存在性，对条件两边取极限，可以解出

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{a+b+c}{3}$$

从此结论出发，按定义a_n

$$|a_n-\frac{a+b+c}{3}|=\frac{1}{3}|2a_n-b_n-c_n|<\varepsilon$$

于是考察a_n-b_n,a_n-c_n由原条件易得

$$a_n-b_n=-\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)$$

等比数列$|q|<1$，得证。
（2）将三个条件循环代入得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}\left(b_{n-1}+c_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n-2}+c_{n-2}}{2}+\frac{a_{n-2}+b_{n-2}}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(a_{n-2}+\frac{c_{n-2}+b_{n-2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(a_{n-2}+a_{n-1}\right)\end{aligned}$$

求通项公式，通常以两个等比数列为坐标；令

$$q^2-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}=0$$

解得

$$q_1=-\frac{1}{2},\ q_2=1$$

于是$\left\{a_n+\frac{1}{2}a_{n-1}\right\}$为公比是$q=1$的等比数列，$\{a_n-a_{n-1}\}$为公比是$q=-\frac{1}{2}$的等比数列，于是

$$a_n=\frac{2\left(a_n+\frac{1}{2}a_{n-1}\right)+\left(a_n-a_{n-1}\right)}{3}$$

代入通项公式，再求极限即得证。
　　$\{a_n\}$的通项公式也可以由两个等比数列之一用初等方法推出。

练习题1.4

January 25, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.4.1 唯一性、有界性、子列、四则运算、无穷小、夹逼准则、保号性

（1）不能判定；如$\{n\}+\{n\},\{n\}+\{-n\}$，$\{(-1)^n\}\times\{(-1)^n\},\{n\}\times\{n\}$

（2）发散；反证法，利用四则运算性质$b_n=(a_n+b_n)-a_n$

（3）发散；反证法，利用四则运算性质$b_n=\frac{a_nb_n}{a_n}$

（4）不能判定；如$\{0\}\times\{n\},\left\{\frac{1}{n}\right\}\times\left\{n^2\right\}$

（5）不能判定；如$\sin n\leqslant\frac{1}{2n}+\sin n\leqslant\frac{1}{n}+\sin n$，$n\leqslant\frac{1}{2n}+n\leqslant\frac{1}{n}+n$

1.4.2 按定义；

充分靠后时$a_{n+1},a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$故

$$1-\frac{2\varepsilon}{a-\varepsilon}<\frac{a-\varepsilon}{a+\varepsilon}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{a+\varepsilon}{a-\varepsilon}<1+\frac{2\varepsilon}{a-\varepsilon}$$

当$a\neq0$时，$\frac{2\varepsilon}{a-\varepsilon}$是任意小；
若$a=0$，则任取一个$|q|<1$的等比数列或

$$a_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}\cdot\{-1,-1,1\},\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\cdot\{1,-1,-1\}$$

极限不存在。

1.4.3 仅用本节前的知识求解

（1）$\lim\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$

（2）$\lim\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}=\lim\frac{-n}{2(n+2)}=\lim\frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}$

（3）$\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$

（4）化简

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

当n充分大时，$\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

由夹逼准则得原式$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^{\frac{1}{n}}=1$

（5）同上，当n充分大时，$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$

（6）考虑$(n)^{\frac{1}{n}}\to 1$**，**$\lim \frac{\left(n^2-n+2\right)^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}}n^{\frac{1}{n}}=\lim\left(n-1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$**，同上；**

（7）同上，当n充分大时，$\frac{1}{2}<\arctan n<\frac{\pi}{2}$

（8）同上，$1\leqslant 2\sin^2 n+\cos^2 n=1+\sin^2 n\leqslant 2$

（9）化简

$$\begin{aligned}
\lim \frac{\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}-(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]}{\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}} &= \lim \frac{\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{4}}-(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}} \\
\text{同理} &= \lim \frac{\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-(n+1)}{\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{4}}+(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]} \\
\text{同理} &= \lim \frac{n^2+1-(n+1)^2}{\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{4}}+(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{2}}+(n+1)\right.} \\
\text{分子为}-2n &= \lim \frac{-2}{\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{4}}+(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{2}}+(n+1)}{n}} \\
&= \lim \frac{-2}{\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{8}}+(n+1)^{\frac{1}{4}}\right]\left[\left(n^2+1\right)^{\frac{1}{4}}+(n+1)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{n}\right.} \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.4.4 求极限（构造：拆项、添项）

（1）$\lim \frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}\frac{1-a}{1-b}\frac{1-b}{1-a}=\lim \frac{1-a^n}{1-b^n}\frac{1-b}{1-a}=\frac{1-b}{1-a}$

（2）$\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

（3）$\lim\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim \frac{n+1}{2}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$

（4）$\lim \frac{2}{1+2}\frac{2+3}{1+2+3}\cdots\frac{2+3+\cdots+n}{1+2+3+\cdots+n}=\lim \frac{4\times1}{3\times2}\frac{5\times2}{4\times3}\cdots\frac{(2+n)(n-1)}{(1+n)\times n}=\lim \frac{2+n}{3}\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$

（5）讨论　当n为偶数时，$\lim \frac{1}{n}|(1-2)+(3-4)+\cdots+(n-1-n)|=\lim \frac{1}{n}|-1\times\frac{n}{2}|=\frac{1}{2}$
当n为奇数时，$\lim \frac{1}{n}|1+(-2+3)+(-4+5)+\cdots+(-(n-1)+n)|=\lim \frac{1}{n}|1+1\times\frac{n-1}{2}|=\frac{1}{2}$

（6）化简

$$\lim \frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=\lim \frac{1}{1-x}\left(1-x^{2^n}\right)=\frac{1}{1-x}$$

1.4.5　求极限（例5）

（1）结合本节内容，从条件$0\leqslant a\leqslant b$**猜测出题意图可能是考夹逼准则；**

$$\left(b^n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(2b^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

得极限为b；

（2）直接推广；取$A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

$$\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(mA^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

得极限为A。

1.4.6　直接放缩；

明显应该用夹逼准则

$$na_n-1<[na_n]\leqslant na_n$$

以下为四则运算，略。

1.4.7　平均值不等式$H\leqslant G\leqslant A$（例4）

夹逼准则

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

左边为$\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1}$当$a\neq0$时，显然得证；
当$a=0$时，

$$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

右边的极限为0，得证。
其实对于$a=+\infty$也是成立的，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}\to0$则$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\to0$于是$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to+\infty$

1.4.8　利用上题结论（题目本身已经给出提示）

（1）$\left\{a_1,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\cdots,\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$**符合4.7的条件；**

（2）$\{a,a,a,\cdots,a\}$**符合（1）的条件；例5的新证法，但其依据4.7的证明依然用到了夹逼准则；**

（3）$\{1,2,3,\cdots,n\}$**符合（1）的条件；1.3例4的新证法，但其依据4.7的证明依然用到了均值不等式来放缩；**

（4）$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}\right\}$**符合4.7的条件。**

1.4.9　同例4，“移动平均”。

1.4.10　按提示；

$\sqrt{n+p}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+p}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+p}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,\ p=1,2,3,\cdots,p$；有限个0相加仍为0

1.4.11　按提示；

$$n=2^a3^b5^c7^d11^e13^f\cdots$$

质数的个数是无穷的，所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists A\text{为第}r\text{个质数},s.t.\ \frac{1}{A}<\varepsilon$$

于是存在$N_1=2\times3\times5\times\cdots\times A_{r-1}\times A$

$$\frac{P\left(N_1\right)}{N_1}=\frac{r}{2\times3\times5\times\cdots\times A}$$

易知$r<A$，所以考虑当A充分大时，r也足够大（$r>4$），$r<(r-1)!$

$$\frac{P\left(N_1\right)}{N_1}=\frac{r}{2\times3\times5\times\cdots\times A}<\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(r-1)}{2\times3\times5\times\cdots\times A_{r-1}\times A}<\frac{1}{A}<\varepsilon$$

再证从N_1往后的所有整数都小于ε

易知：记B为第$r+1$个质数，则完全同上的有

$$\frac{P\left(N_2\right)}{N_2}=\frac{r+1}{2\times3\times5\times\cdots\times A\times B}<\frac{1}{B}<\frac{1}{A}<\varepsilon$$

质数的个数是无穷的，上式可“蛙跳”至无穷，于是只须证明N_1到N_2之间的整数n满足结论；

$$n<N_2\Rightarrow P\left(n\right)<r+1$$

对于$N_1<n<N_2$

$$\frac{P\left(n\right)}{n}<\frac{r+1}{N_1}<\varepsilon$$

因为当A充分大时，r也足够大（$r>4$），$r+1<(r-1)!$完全同上，得证。

1.4.12　按提示

先证等式

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1&=\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)\\\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)&=\frac{k}{n^2}\end{aligned}$$

于是

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)$$

其中

$$\begin{gathered}\frac{1}{n}\geqslant\quad\tfrac{k}{n^2}=\tfrac{1}{n}\tfrac{k}{n}\quad\geqslant\frac{1}{n^2}\\\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\leqslant\quad\tfrac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\quad\leqslant\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\end{gathered}$$

得证。

练习题1.5

January 26, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

无界、无界子列、子列、加法和乘法

1.5.1 放缩法；

当n充分大时（$n>4$）

$$P(n)=(n-4)n^2+(5n-6)>n^2$$
$$P(-n)=-n^3-4n^2-5n-6<-n^3$$

1.5.2 也是习题1.4.7在a为无穷大情况下的特例；

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{(1+n)n}{2n}=\frac{1+n}{2}$$

1.5.3 也是习题1.4.7在a为无穷大情况下的特例；

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2n+1}{6}$$

1.5.4 分子有理化；

$$\frac{n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{n(n-(n+1))}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}(-1)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\frac{-\sqrt{n}}{2}$$

1.5.5 放缩法；

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}>\frac{n}{\sqrt{n+n}}$$

1.5.6　观察法；

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n+\frac{1}{a_n}=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=\cdots \\ &= a_1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

可考虑调和级数；显然$\{a_n\}$是递增的正数列，若能证明

$$a_n<n$$

即可；归纳法

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}<n+\frac{1}{a_n}$$

而由均值不等式易知

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant 2\sqrt{a_{n-1}\frac{1}{a_{n-1}}}=2$$

得证。

本题也是1.11节例2的一个实例： $\lim\frac{a_n}{n}$存在说明$a_n\to+\infty$；只须说明$\{a_n\}$满足1.11节例2的条件即可；同上$a_n\geqslant 2$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}\leqslant a_n+a_1$$

用归纳法

$$\begin{aligned} a_{n+m+1}= \quad a_{n+m}+\tfrac{1}{a_{n+m}} &\leqslant a_n+a_m+\frac{1}{a_{n+m}} \\ &\leqslant a_n+a_m+\frac{1}{a_m}=a_n+a_{m+1} \end{aligned}$$

得证。

调和级数发散，其和趋于$+\infty$的证明；

❶1.6节例2

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ &\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{个}\frac{1}{2}}=1+\frac{k}{2} \end{aligned}$$

❷1.8节例4

$$\begin{aligned} a_{n+p}-a_n &= \frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha} \\ &\geqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p} \end{aligned}$$

于是总有

$$a_{2n}-a_n\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$$

单调递增的数列$\{a_n\}$不是基本列，不存在极限，故无界，从而$\{a_n\}\to+\infty$

❸1.7节习题8、习题10

练习题1.6

January 26, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

单调有界数列必有极限、闭区间套定理

1.6.1 利用定理1.8证明；

（1）当n充分大时，$0<\frac{n+9}{2n-1}<1$，$\{x_n\}$是递减的，有下界0

（2）$0<1-\frac{1}{n+1}<1$，$\{x_n\}$是递减的，有下界0

（3）$1+\frac{1}{2^{n+1}}>1$，$\{x_n\}$是递增的，只须证明有上界；

❶等比数列；

由递推公式$x_{n+1}=x_n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$易知

$$x_n=x_1+\frac{x_1}{2^2}+\frac{x_2}{2^3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{2^n}$$

考虑等比数列，而$\{x_n\}$是递增的正数列，只留下x_n

$$\begin{aligned}
x_n &\leqslant \frac{3}{2}+\frac{x_n}{2^2}+\frac{x_n}{2^3}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}\\
x_n &\leqslant \frac{3}{2}+\frac{x_n}{2^2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{3}{2}+\frac{x_n}{2}\\
x_n &< 3
\end{aligned}$$

❷均值不等式；

$$\begin{aligned}
x_n=G^n\leqslant A^n &= \left(\frac{1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+1+\frac{1}{2^n}}{n}\right)^n\\
&= \left(1+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e
\end{aligned}$$

注（1.7节）

$$\begin{aligned} e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

单调递增必有极限；

❸取对数，积化和；由

$$\ln(1+a) < a$$

或（不用到更后面的知识）由

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

及$\ln x$的单调性得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

结合e^x的单调性，于是

$$\begin{aligned} x_n &= \exp\sum\ln\left(1+\tfrac{1}{2^n}\right) &< \exp\sum\frac{1}{2^n} \\ & &< e \end{aligned}$$

1.6.2 明显$\{x_n\}$递增;

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > x_n \Leftrightarrow -1 < x_n < 2$$

而$x_1 = \sqrt{2}$

$$x_n < 2 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$$

由归纳法知

$$x_n < 2$$

不仅证明了$\{x_n\}$递增，同时证明了$\{x_n\}$有界，得证。

1.6.3 按定义;

只须证明递增情况；设$\{a_{k_n}\}$收敛于A，即

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in N_+, s.t.\quad 当n\geqslant N_1时, A-\varepsilon < a_{k_n} < A+\varepsilon$$

由于

$$\begin{aligned} k_n &\geqslant n \\ a_n &\leqslant a_{k_n} < A+\varepsilon \end{aligned}$$

当$n > N_2 > k_{N_1}$时

$$\begin{aligned} n &> k_{N_1} \\ a_n &\geqslant a_{k_{N_1}} > A-\varepsilon \end{aligned}$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$即得证。

1.6.4 按提示；

$$0 < a_n\left(1-a_n\right) \leqslant \frac{1}{4} < \left(1-a_n\right)a_{n+1}$$

而$0 < a_n < 1$

$$a_n < a_{n+1}$$

单调递增有上界，设$\lim a_n = A$，则

$$A\left(1-A\right) \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \left(1-A\right)A$$

解出$A = \frac{1}{2}$

1.6.5 直接写出；

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geqslant a_n \\
(n+1)!^{\frac{1}{n+1}} &\geqslant n!^{\frac{1}{n}} \\
(n+1)! &\geqslant n!^{1+\frac{1}{n}} \\
n+1 &\geqslant n!^{\frac{1}{n}} \\
(n+1)^n &\geqslant n! \\
(n+1)^n &\geqslant n^n > n!
\end{aligned}$$

练习题1.7

February 1, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1}$$

1.7.1 要求严格按定义及四则运算等;

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2}\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n-1}\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n-1} = e$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^2 = \frac{1}{e}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \begin{cases}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e^2 & ,n=2m\\ \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\right)^m\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\right)^m\left(1+\frac{2}{2m+1}\right) = e^2 & ,n=2m+1\end{cases}$$

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\right)^m < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

（5）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\begin{cases}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e^3 & ,n=3m\\ \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{3}}\right)^m\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{3}}\right)^m\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{3}}\right)^m\left(1+\frac{3}{3m+1}\right)=e^3 & ,n=3m+1\\ \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+\frac{2}{3}}\right)^m\left(1+\frac{1}{m+\frac{2}{3}}\right)^m\left(1+\frac{1}{m+\frac{2}{3}}\right)^m\left(1+\frac{3}{3m+2}\right)^2=e^3 & ,n=3m+2\end{cases}$$

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{3}}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

（6）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}=e^2$$

1.7.2 k**是有限数；仿照上题（4）（5）小题讨论，将原数列不重不漏分成**k**个子列，可证明这**k**个子列的极限都是**e^k**，得证；**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k \tag{2}$$

1.7.3 正文用二项展开，这里按提示用均值不等式；

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\times\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}<\left[\frac{1+n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{3}$$

1.7.4 按提示；

证明$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$严格递增，均值不等式

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1\times\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdots\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{n+1\text{个}}<\left[\frac{1+(n+1)\times\frac{n}{n+1}}{n+1}\right]^{n+2} \tag{4}$$

1.7.5 利用前两题结论；左边严格递增地趋于e**，右边严格递减地趋于**e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{5}$$

1.7.6 利用上题结论；对数函数严格递增；

对上式取对数即得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \tag{6}$$

1.7.7 利用上题结论最便捷；或者利用第2题结论，将第3、4题中的$\frac{1}{n}$**替换为**$\frac{k}{n}$**，再经过第5题也可得证；**

右边

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^k=k\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{k}{n}$$

左边

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\ln\frac{n+k}{n} &= \ln\frac{n+k}{n+k-1}\frac{n+k-1}{n+k-2}\cdots\frac{n+1}{n} \\ &> \frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}>\frac{k}{n+k}\end{aligned}$$

结论

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n} \tag{7}$$

1.7.8 利用第6题结论；

令（6）式中$n=1,2,\cdots,n$；然后将n个不等式加起来即得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{1}\right)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \tag{8}$$

1.7.9 利用上题结论；

由（8）式易知

$$0<x_n<1-\frac{1}{n+1}<1$$

试证$\{x_n\}$单调，利用第6题结论

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln(n+2)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$$

得证；欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right) \tag{9}$$

1.7.10 利用上题结论；

$\gamma=\lim x_n$相当于

$$\begin{aligned}x_n &= \gamma+\alpha_n \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} &= \ln(n+1)+\gamma+\alpha_n\end{aligned}$$

将ε_n记作

$$\varepsilon_n=\alpha_n+\ln(n+1)-\ln n=\alpha_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{\ln(n+1)+\gamma+\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times ne^{\gamma}e^{\varepsilon_n}=e^{\gamma} \tag{10}$$

用定义证明

$$e^{\varepsilon_n}\to 1$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,s.t.\quad 当n\geqslant N时,1-\varepsilon<e^{\varepsilon_n}<1+\varepsilon,\ln(1-\varepsilon)<\varepsilon_n<\ln(1+\varepsilon)$$

另外，$\{x_n\}$递增地趋于γ，$\alpha_n<0$；由（6）式得

$$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0$$

故ε_n递减地趋于0，$\varepsilon_n > 0$；由（5）式得

$$\frac{\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n+1}} < 1$$

故（10）左边递减地趋于e^{γ}，则$\gamma < 1$

$$\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} > e^{\gamma}, \text{当}n=1\text{时}, e > e^{\gamma}$$

1.7.11 利用上题结论；

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \tag{11}$$

❶按前面各题的解法，应该是设法利用前面的结论（实际上课程视频中已经给出了明确提示）

注意到（10）式的递减性质

$$\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} > \frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}$$

于是

$$\left.\begin{array}{l} 1\,e^1 \\ >\dfrac{1}{2}e^{1+\frac{1}{2}} \\ >\dfrac{1}{3}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \\ >\cdots \\ >\dfrac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \end{array}\right\} > \frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}$$

将这n个不等式相乘，可构造出$n!$和$(n+1)^n$

$$\frac{1}{n!}\exp\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\} > \left(\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^n}{n!} &> \exp\left\{\left[\begin{array}{l} \quad 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \\ +1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \\ +1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \\ +\cdots \\ +1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \end{array}\right]_{n+1\text{行}} - \left[\begin{array}{l} \quad 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \\ +1 \\ +1+\dfrac{1}{2} \\ +\cdots \\ +1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} \end{array}\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\left[1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+\cdots+(n+1)\times\frac{1}{n+1}\right]-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n+1-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\right\} \end{aligned}$$

据此可先证右边，只须

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} > (n+1)\exp\left\{n+1-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)\right\} &\geqslant e^n \\ (n+1)\,e &\geqslant e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}} \\ e &\geqslant \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}}{n+1} \end{aligned}$$

右边即（10）式在$n+1$时的情况，递减，$n=1$时取等号，右边得证；

左边只与右边相差一个$n+1$因子，考虑将（10）式改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=e^{\gamma}$$

可能是递增的，完全仿照前面的过程（对称的），即可证明左边。

由（5）式得

$$\frac{\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}}=\frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}}>1$$

果然；于是

$$\left.\begin{array}{l}\quad\frac{1}{2}e^{1}\\ <\frac{1}{3}e^{1+\frac{1}{2}}\\ <\frac{1}{4}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\\ <\cdots\\ <\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\end{array}\right\}<\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

将这$n-1$个不等式相乘得

$$\frac{1}{n!}\exp\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\right\}<\left(\frac{1}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{n-1}}{n!}&<\exp\left\{\left[\begin{array}{l}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\ +1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\ +1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\ +\cdots\\ +1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\end{array}\right]_{n\text{行}}-\left[\begin{array}{l}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\ +1\\ +1+\frac{1}{2}\\ +\cdots\\ +1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\end{array}\right]\right\}\\ &=\exp\left\{\left[1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+\cdots+n\times\frac{1}{n}\right]-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}\\ &=\exp\left\{n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}\end{aligned}$$

据此证左边，只须

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{n}}{n!}<(n+1)\exp\left\{n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}&\leqslant e^{n}\\ n+1&\leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\\ 1&\leqslant\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1}\end{aligned}$$

右边即（10）的改写式，递增，$n=1$时取小于号，左边得证；

❷利用第5题的结论；形似（5）式；

令（5）式中$n=1,2,3,\cdots,n$，再将n个不等式相乘

$$\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}<e^{n}<\left(\frac{2}{1}\right)^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{4}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

得证；

❸构造法；

观察（11）式结构，阶乘和n次方，考虑是否有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} < n < \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

化简后正好是（5）式，得证；

❹积分法；

阶乘和n次方，取对数化简

$$n \ln (n+1) - n < \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n+1) \ln (n+1) - n$$

考虑到

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

右边即

$$[x \ln x - x]_1^{n+1}$$

左边与右边相差$\ln (n+1)$，考察误差限；中间表示成黎曼和的形式；

对于函数$\ln x$，将区间$[1, n+1]$顺次n等分，每个小区间长度为1，取每个小区间左端点的函数值作黎曼和A；则A等于曲线下一系列长方形的面积之和，小于曲线下面积，于是得到右边；误差小于$\ln (n+1)$，于是得到左边。

取每个小区间右端点的函数值作黎曼和B，则大于曲线下面积，组成B的每一个长方形都比A相应的部分高出一小块长方形，一共高出$\ln (n+1)$，所以长方形的底边长均为1，于是$B - A = \ln (n+1)$

1.7.12 利用上题结论；要求不用到（连续函数）求极限的复合法则；

对（11）式取极限，再用夹逼准则，即得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{e} \tag{12}$$

计算右边时用到

$$\sqrt[n]{e} \to 1$$

易用定义和对数函数的单调性证明

$$\sqrt[n]{n+1} \to 1$$

可用1.3节例4和夹逼准则证明

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{n}$$

1.7.13 直接写出；

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \frac{n}{n+1} < \theta_n < 1$$

转化命题，即证

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - s_n < \frac{1}{n!n}$$

左边显然，右边只要证明不能取等号，按照正文的方法放缩时取$\frac{1}{n+2}$即可。

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots > 0$$

$$
\begin{aligned}
s_{n+m}-s_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} \\
e-s_n &\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n!n}
\end{aligned}
$$

1.7.14　根据上题结论；

$$n!\,(e-s_n)<\frac{1}{n}$$

故

$$[n!e]=n!s_n=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

1.7.15　利用第10题结论；

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 2n-\ln n+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\right)=\ln 2$$

练习题1.8

February 2, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底e

1.8 基本列

1.8.1 按定义；

是基本列；

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,s.t.\quad 当n\geqslant N时,|a_n-a_N|<\varepsilon \tag{1}$$
$$\Rightarrow 当n,m\geqslant N时,|a_n-a_m|\leqslant|a_n-a_N|+|a_m-a_N|<2\varepsilon$$
$$\Leftarrow 显然,将m固定为N即可$$

1.8.2 按定义；

（1）不是基本列；　如

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$|H_{n+p}-H_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n}$$

（2）是基本列；

$$n,p\in N_+,(当n充分大时),|a_{n+p}-a_n|<\frac{p}{n^2} \tag{2}$$

取$p=1$得

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right| &\leqslant \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+p-1)^2}+\frac{1}{(n+p-2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \\ &\leqslant \frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}+\frac{1}{(n+p-2)(n+p-3)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1}<\frac{1}{n-1}<\varepsilon\,,\text{与}p\text{无关}\end{aligned}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,s.t.\quad \text{当}n\geqslant N\text{时},|a_{n+p}-a_n|<o(n)<\varepsilon \tag{3}$$

记$p=m-n$即得证。

1.8.3 证明下列数列收敛；

（1）由2题的结论；

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right| &= \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+(-1)^{n+p}\frac{1}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{p}{n^2}\end{aligned}$$

（2）由第2题的结论；

$$\begin{aligned}\left|b_{n+p}-b_n\right| &= \left|a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}\right| \\ &\leqslant |a_{n+1}q^{n+1}|+|a_{n+2}q^{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}q^{n+p}| \\ &\leqslant M\left(|q^{n+1}|+|q^{n+2}|+\cdots+|q^{n+p}|\right) \\ &\leqslant M|q^{n+1}|\frac{1}{1-|q|}<\varepsilon\,,\text{与}p\text{无关}\end{aligned}$$

（3）由第2题的结论；

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{p}{n^2}\end{aligned}$$

（4）如上题；

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1)x)}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)(n+2+\sin(n+2)x)}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)n}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)} \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon\,,\text{与}p\text{无关}\end{aligned}$$

1.8.4 基本列；

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right| &= \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n\right| \\ &\leqslant \left|a_{n+p}-a_{n+p-1}\right|+\left|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|a_{n+1}-a_n\right| \\ &= s_{n+p}-s_n \leqslant \left|s_{n+p}-s_n\right|\end{aligned}$$

其中

$$s_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$$

单调递增有界，故有极限，是基本列，故

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,s.t.\quad 当n\geqslant N时,|a_{n+p}-a_n|<|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$$

1.8.5 不是基本列；

$$\exists\varepsilon_0>0,s.t.\quad \forall n\in N_+,\exists p\in N_+,s.t.\quad |a_{n+p}-a_n|>\varepsilon_0 \tag{4}$$

1.8.6 Bolzano-Weierstrass定理；

Bolzano-Weierstrass定理的意思是“在有界的区间内，（可列）无限项必然形成聚点”；对于数列，收敛是只有一个聚点，那么发散必然有两个以上的聚点；

不是基本列，则有上题（4）式，

先取$a_{k_n}\to a$，则k_n充分大时有$|a_{k_n}-a|<\frac{\varepsilon_0}{2}$，即每一项都在区间$\left(a-\frac{\varepsilon_0}{2},a+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$内，

对以上的每一个k_n都存在p使得$|a_{k_n+p}-a_{k_n}|>\varepsilon_0$，取为子列$\{a_{l_n}\}$

$$\{a_{l_1}=a_{k_{n1}+p_1},（取k_{n2}>k_{n1}+p_1）a_{l_2}=a_{k_{n2}+p_2},\cdots\cdots\}$$

于是$\{a_{l_n}\}$每一项都在区间$\left(a-\frac{\varepsilon_0}{2},a+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$外，

区间外有无限项，再从$\{a_{l_n}\}$中取出收敛子列，极限必然也在$\left(a-\frac{\varepsilon_0}{2},a+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$外。

练习题1.9

February 2, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底e

1.8 基本列

1.9 确界原理

1.9.1 按定义；

（1） $\{-1,0,3,8,9,12\}, \sup E=12, \inf E=-1$

（2） $\left\{\frac{1}{n}: n\in N_+\right\}, \sup E=1, \inf E=0$

（3） $\{\sqrt{n}: n\in N_+\}, \sup E=+\infty, \inf E=1$

（4） $\left\{\sin\frac{\pi}{n}: n\in N_+\right\}, \sup E=1, \inf E=0$

（5） $\left\{x: x^2-2x-3<0\right\}, \sup E=3, \inf E=-1$

（6） $\{x: |\ln x|<1\}, \sup E=e, \inf E=e^{-1}$

1.9.2 习题1.7.5结论；

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

左边递增地趋于e，右边递减地趋于e；

$$\inf\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2, \sup\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 4$$

显然

$$\sup\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \inf\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

满足确界的定义

$$1^{\diamond}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e$$

$$2^{\diamond}\forall \varepsilon>0,\ \exists N \in N_{+}, s.t.\quad \text{当} n>N \text{时}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geqslant e-\varepsilon$$

单调有界数列的极限就是其相应一个确界。

1.9.3 利用1.3节例4的结论；

极限是1,考察单调性

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{n}} &\lesseqqgtr (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \\ n^{n+1} &\lesseqqgtr (n+1)^{n} \\ n &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \end{aligned}$$

从$n \geqslant 3$起递减

$$\left\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \cdots\cdots e\right\}$$

1.9.4 利用练习题1.8.6的结论；

仿照正文中证明Bolzano-Weierstrass定理时用到的引理1.1，从任意一个数出发，可以找出递增的和递减的两个单调数列，不论是否有界，数列都发散（无界当然发散，有界时以上两个子列收敛于不同的极限值）。

练习题1.11

February 5, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底e

1.8 基本列

1.9 确界原理

1.10 有限覆盖定理

1.11 上下极限

1.11.1 上下极限是尾部的性质，与前有限项无关；

（1）（2）（3）（4）按奇偶性讨论，均只有两个聚点

（5）取$n = 4m+1$**和**$n = 4m+3$**，分别得到**$\pm\infty$

（6）只有两个极限点

$$\frac{n^2}{1+n^2}\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \cdots\right\}$$

（7）极限为0**，根据1.7节习题12结论**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{e}$$

1.11.2 基本结论；无限的情况均可单独讨论；不考察$0\cdot\infty, \infty\pm\infty$之类的情况；

（1）

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \quad &\leqslant \quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \\ &\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \quad (1)\end{aligned}$$

❶重点考察有界的情况；

“去掉”有限项，只剩下聚点，$\{a_n+b_n\}$的上下极限只可能由a_n,b_n各自的聚点生成，两端是显然的；

中间部分以下极限为例，以a_*为基础生成$\{a_n+b_n\}$一个聚点（意思是以形成a_*的一个子列a_k为基础+对应的b_k项，再用列紧性定理），其结果不会超过a_*+b^*，最小的聚点更是不大于a_*+b^*；用$\varepsilon-N$语言叙述即可，但较繁琐；

❷利用定理1.16和1.17；写出来也较简洁；

对于任何数列的任意项总有

$$\alpha_n=\inf_{n\geqslant k}x_n\overset{\text{记作}}{=}\inf\{x_k,x_{k+1},\cdots\}\leqslant x_k\leqslant\sup\{x_k,x_{k+1},\cdots\}\overset{\text{记作}}{=}\sup_{n\geqslant k}x_n=\beta_n$$

对于数列$\{a_n+b_n\}$也有该式，对式子分别取上下极限（由定理1.16和1.17）两端就得到了证明；

中间部分以下极限为例，注意a_*是聚点，于是

$$\forall\varepsilon>0,\exists a_k<a_*+\varepsilon$$

$$b_k\leqslant\sup\{b_k,b_{k+1},\cdots\}$$

故

$$a_k+b_k<a_*+\varepsilon+\sup\{b_k,b_{k+1},\cdots\}$$

对此式取下极限，再令$\varepsilon\to\infty$，即得证；

❸利用定理1.15；

命题考察的都是数列尾部的性质；以上半节为例，由定理1.15，$a_*-\varepsilon$左边只有有限项，于是当n充分大时，有

$$a_*-\varepsilon<a_n$$

同理

$$b_n<b^*+\varepsilon$$

于是

$$a_*-\varepsilon+b_n<a_n+b_n<a_n+b^*+\varepsilon$$

对此式取下极限，再令$\varepsilon\to\infty$，即得证；

（2）

$$\text{若}\lim b_n=b,\text{则}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n)&=\liminf_{n\to\infty}a_n+b\\\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)&=\limsup_{n\to\infty}a_n+b\end{aligned}\tag{2}$$

❶从聚点的角度看是很明显的，上题解法1已经用到这个结论；只是用$\varepsilon-N$语言叙述比较繁琐；

❷利用上题结论直接写出即可；

（3）注意以下结论

$$\begin{aligned}\sup\{-E\}&=-\inf\{E\}\\\inf\{-E\}&=-\sup\{E\}\end{aligned}$$

❷再由定理1.17，结论是明显的

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}(a_n)&=-\limsup_{n\to\infty}a_n\\\limsup_{n\to\infty}(a_n)&=-\liminf_{n\to\infty}a_n\end{aligned}\tag{3}$$

（4）对于非负数列

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n b_n \quad \leqslant \quad & \liminf_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n \\ & \limsup_{n\to\infty} a_n \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n \end{aligned} \tag{4}$$

❶聚点的观念
❷利用定理1.16和1.17
❸利用定理1.15
完全同上，注意条件是对非负数列，否则如

$$\{-1,-1,1,1,\cdots\} \text{ 与 } \{1,2,1,2,\cdots\}$$

（5）若非负数列$b_n \to b$，则

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n b_n &= b \times \liminf_{n\to\infty} a_n \\ \limsup_{n\to\infty} a_n b_n &= b \times \limsup_{n\to\infty} a_n\end{aligned} \tag{5}$$

①若a_n也非负，由上题结论立即得证；设法化为非负的情况；一个常用的方法是

$$\text{取} c_n = \begin{cases} a_n & , a_n \geqslant 0 \\ 0 & , a_n < 0 \end{cases}$$

但应用此式的前提是$\{a_n\}$有无限个非负项，即$a^* > 0$；
对于上极限来说，既然存在无限个非负项，就不必考虑负项的情况，便有

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} c_n$$

下半节得证；易看出上半节完全对称；
②对于$a^* \leqslant 0$的情况，设法化为正的情况；因为必定存在常数$d + a^* > 0$

$$\text{令} d_n = d + a_n$$

就化为了①的情况（由第2题（2）结论）；

1.11.3 利用2题结论；

本节习题自然是利用上下极限的各种性质；
本节实际给出了上下极限的三种定义（定义1.13，定理1.15，定理1.17）和几个性质（定理1.16和第2题结论）；由（2）（3）得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}(a_{2n} + 2a_n - 2a_n) &= \liminf_{n\to\infty} -2a_n = -2\limsup_{n\to\infty} a_n \\ &= \liminf_{n\to\infty} a_{2n} \\ \limsup_{n\to\infty}(a_{2n} + 2a_n - 2a_n) &= \limsup_{n\to\infty} -2a_n = -2\liminf_{n\to\infty} a_n \\ &= \limsup_{n\to\infty} a_{2n}\end{aligned}$$

注意到子列的聚点集e是原聚点集E的子集，故

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n &\leqslant \liminf_{n\to\infty} a_{2n} \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &\geqslant \limsup_{n\to\infty} a_{2n}\end{aligned}$$

代入得

$$-2\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant -\frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} a_n$$

只能是

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

得证。

1.11.4 根据结论用定理1.15；

上极限不大于1，说明$1+\varepsilon$右边只有有限项

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, s.t. \quad 当n \geqslant N时, \sqrt[n]{a_n} < 1+\varepsilon即\frac{\sqrt[n]{a_n}}{1+\varepsilon} < 1$$

必要性得证；反之也成立，用$\varepsilon - N$叙述即可。

练习题1.12

February 17, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底e

1.8 基本列

1.9 确界原理

1.10 有限覆盖定理

1.11 上下极限

1.12 Stolz定理

1.12.1 直接应用定理；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+1}{n}}=1$$

1.12.2 直接应用定理；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\ln 2\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\ln\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}}=1$$

1.12.3 直接应用定理；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=2$$

1.12.4　直接应用定理；

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

1.12.5　取对数，再应用定理；利用指数函数的连续性；

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{\ln n!}{n^2} &= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^2}\\ &= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2-(n-1)^2}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}\\ &= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{2}=1\end{aligned}$$

1.12.6　直接应用定理；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{3n^2+3n+1}=\frac{4}{3}$$

1.12.7　直接应用定理；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}$$

1.12.8　极限不存在或不相等；

$$\frac{n\pm 1}{n\pm\frac{1}{n}}\to 1,\begin{cases}a_n & 1-1,2+1,3-1,4+1,\cdots,n\pm 1\\ b_n & 1-1,2+\frac{1}{2},3-\frac{1}{3},4+\frac{1}{4},\cdots,n\pm\frac{1}{n}\end{cases},\ \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\{-1,3\}}{1\mp\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}\to\{-1,3\}$$

$$\frac{\ln n\pm 1}{\ln n\pm\frac{1}{n}}\to 1,\begin{cases}a_n & \ln 1-1,\ln 2+1,\ln 3-1,\ln 4+1,\cdots,\ln n\pm 1\\ b_n & \ln 1-1,\ln 2+\frac{1}{2},\ln 3-\frac{1}{3},\ln 4+\frac{1}{4},\cdots,\ln n\pm\frac{1}{n}\end{cases},\ \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\ln\frac{n+1}{n}+\{2,-2\}}{\ln\frac{n+1}{n}\pm\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)}\to\pm\infty$$

$$a_n\to a,b_n=1\text{时},\text{表达式}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\text{无意义}$$

$$\frac{n+\sin n}{n}\to 1,\ \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=1+\sin(n+1)-\sin n=\sim$$

1.12.9　按定义；

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,s.t.\quad\text{当}n\geqslant N\text{时},A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon$$

注意$\{b_n\}$严格递减地趋于0，上式分子为正，利用练习题1.1.11的结论，将$n+1,n+2,\cdots,n+p$的式子“相加”

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+p}-a_n}{b_{n+p}-b_n}<A+\varepsilon$$

令$p\to\infty$得（用到条件$a_n\to 0$）

$$A-\varepsilon<\frac{-a_n}{-b_n}<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<\liminf\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\leqslant\limsup\left(\frac{a_n}{b_n}\right)<A+\varepsilon$$

$A=\pm\infty$的情况也适合。

练习题1.13

February 19, 2013

1 第一章 实数和数列极限

1.1 数轴

1.2 无尽小数

1.3 数列极限

1.4 收敛的性质

1.5 无穷大

1.6 单调数列

1.7 自然对数底e

1.8 基本列

1.9 确界原理

1.10 有限覆盖定理

1.11 上下极限

1.12 Stolz定理

1.13 几个应用

1.13.1 直接应用第1目结论；

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(3+\frac{5}{3}\right) &= \frac{7}{3} \approx 2.33 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{5\times 3}{7}\right) &= \frac{47}{21} \approx 2.238 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{47}{21}+\frac{5\times 47}{21}\right) &= \frac{2207}{987} \approx 2.2360689 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{2207}{987}+\frac{5\times 987}{2207}\right) &= \frac{4870847}{2178309} \approx 2.236068
\end{aligned}$$

1.13.2 仿照第1目；

只须讨论$a>0$的情况（$a<0$的情况完全对称）

先验证

$$\begin{aligned}
x_1 = \frac{1}{3}\left(2x+\frac{a}{x^2}\right) &\gtreqless \sqrt[3]{a} \\
\left(2x+\sqrt[3]{a}\right)\left(x-\sqrt[3]{a}\right)^2 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

再观察

$$\begin{aligned}0 \leqslant x_1 - \sqrt[3]{a} &= \frac{1}{3}\left(x - \sqrt[3]{a}\right)\left(2 - \frac{\sqrt[3]{a}}{x} - \frac{\sqrt[3]{a}^2}{x^2}\right) \\ &\quad \text{恰有} 0 \leqslant \left(2 - \frac{\sqrt[3]{a}}{x} - \frac{\sqrt[3]{a}^2}{x^2}\right) \leqslant 2\end{aligned}$$

于是得证

$$0 \leqslant x_1 - \sqrt[3]{a} \leqslant \frac{2}{3}\left(x - \sqrt[3]{a}\right)$$

1.13.3 完全仿照上题；

只须讨论$a > 0$的情况（$a < 0$的情况完全对称）

先验证

$$\begin{aligned}x_1 = \frac{1}{m}\left((m-1)x + \frac{a}{x^{m-1}}\right) &\gtreqless \sqrt[m]{a} \overset{\text{记作}}{=} A \\ (m-1)x^m + A^m &\geqslant mAx^{m-1} \\ (m-1)x^{m-1}(x-A) + A^m &\geqslant Ax^{m-1} \\ (m-1)x^{m-1}(x-A) &\geqslant A\left(x^{m-1} - A^{m-1}\right) \\ (m-1)x^{m-1} &\geqslant A\left(x^{m-2} + Ax^{m-3} + \cdots + A^{m-2}\right) \\ (m-1)x^{m-1} &\geqslant Ax^{m-2} + A^2x^{m-3} + \cdots + A^{m-1} \\ \text{只须取} x \geqslant A \text{即可} &\quad \text{右边每一项都不大于左边}\end{aligned}$$

再观察

$$\begin{aligned}0 \leqslant x_1 - A &= \frac{1}{m}(x-A)\left(m - 1 - \frac{A}{x} - \frac{A^2}{x^2} - \cdots - \frac{A^{m-1}}{x^{m-1}}\right) \\ &\quad \text{恰有} 0 \leqslant \left(m - 1 - \frac{A}{x} - \frac{A^2}{x^2} - \cdots - \frac{A^{m-1}}{x^{m-1}}\right) \leqslant m-1\end{aligned}$$

于是得证

$$0 \leqslant x_1 - \sqrt[m]{a} \leqslant \frac{m-1}{m}\left(x - \sqrt[m]{a}\right)$$

源于二项展开式，设

$$x^m = a$$

则

$$(x+\Delta)^m \geqslant a$$

设法缩小$x+\Delta$，可利用二项展开得到不等式，取前两项依然有

$$\begin{aligned}x^m + mx^{m-1}\Delta &\geqslant a \\ \Delta &\geqslant \frac{a - x^m}{mx^{m-1}} \\ x + \Delta &\geqslant \frac{a - x^m + mx^m}{mx^{m-1}} = \frac{1}{m}\left((m-1)x + \frac{a}{x^{m-1}}\right)\end{aligned}$$

再进行验证。

1.13.4 仿照第2目，分割求和；

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^3 \frac{a}{n} = \frac{a^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+n^3 &= 1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2\times(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 0\times 1\times 2+1\times 2\times 3+\cdots+(n-1)\times n\times(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&\quad +1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1) \\
&= \frac{1}{4}\left\{1\times 2\times 3\times[4-0]+2\times 3\times 4\times[5-1]+\cdots+(n-1)\times n\times(n+1)\times[n+2-(n-2)]\right\}-\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&\quad +\frac{1}{3}\left\{1\times 2\times[3-0]+2\times 3\times[4-1]+\cdots+n\times(n+1)\times[n+2-(n-1)]\right\} \\
&= \frac{1}{4}(n-1)\times n\times(n+1)\times(n+2)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)
\end{aligned}
$$

1.13.5　无穷级数求和；

（1）

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1
$$

（2）本节不讨论级数的敛散性，在级数和存在的前提下

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\cdots \\
\frac{1}{3}S &= \qquad \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\cdots \\
\text{两式相减得}\frac{2}{3}S &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots
\end{aligned}
$$

1.13.6　单调有界数列必有极限，定理1.8；

1.13.7　注意到a_n正是部分和数列$\{S_n\}$的相邻两项之差，用反证法，部分和数列将不是基本列，Cauchy收敛原理；调和数列即逆命题的一个反例，1.6节例2。

练习题2.1

May 11, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.1.1 写出$f(x)$即可；

2.1.2 显然

$$f^n(a)=\begin{cases} a & ,n\text{为偶数} \\ f(a) & ,n\text{为奇数} \end{cases}$$

2.1.3 按定义；

（1）$D\circ D:\mathbf{R}\to\{1\}$

（2）逆像的定义；

2.1.4 按定义写出即可（注意n为有限数）；

（1）像的定义、集合相等的定义；

（2）逆映射的定义；

（3）$n!$**个；**

2.1.5 只须写出一种即可，如

$$1\to 2,2\to 3,\cdots,n-1\to n,n\to 1$$

练习题2.2

May 11, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.2.1 定理2.2；

2.2.2 定理2.2；

❶多项式的“高”——n是可数的；
❷对于每一个确定的n，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$是可数的，从而高为$n$的多项式是可数的；
❸对于每一个确定的多项式，代数数是有限的。

2.2.3 定理2.1及2.3；

❶从A的每个元素（长度不为零的区间）中都可以取出一个有理数，由于互不相交，这个有理数就可以成为该区间的唯一代表（建立了A与有理数的某个子集间的一一映射）
❷有理数是可数的，有理数的子集是至多可数的；

2.2.4 建立某种一一映射；

❶S与$(0,1)$上的二进制无尽小数一一对应；
❷二进制数与十进制数一一对应；
❸$(0,1)$与$[0,1]$的势相等。

2.2.5 不化成二进制也可以；

$$\forall k \in N, \exists x \in [0,1), s.t. \quad x \neq x_1, x_2, \cdots, x_k$$

2.2.6 反证法；

❶若某一直线列A能覆盖整个平面，则其必有某个子集A_1能覆盖半圆弧$[0,\pi)$；
❷A_1中每条直线与半圆弧的交点（或切点）为1个或2个，于是可将A_1化为过圆心的直线列B，则B也能覆盖半圆弧$[0,\pi)$；**公理两点确定一条直线**；
❸直线列$B \longleftrightarrow$半圆弧上的点$\longleftrightarrow$弧长$[0,\pi)$；
❹而弧长$[0,\pi)$是区间，是不可数的；**圆的弧长有公理化的定义**。

Shrek

练习题2.3

August 9, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.3.1 按定义；

（1）$[-1,1]$

（2）$\mathbf{R}\backslash\{1\}$

（3）$\mathbf{R}\backslash\{-2,1\}$

（4）$\left\{x\in R: x\neq 2k\pi-\frac{1}{2}\pi, x\neq 2k\pi\right\}$

2.3.2 不动点；

若$f\circ f(a)=a$，则由结合律

$$f(a)=f(f\circ f(a))=f\circ f(f(a))$$

故$f(a)$也是是$f\circ f$的不动点，由唯一性知：

$$f(a)=a$$

若还有$f(b)=b$，则

$$\begin{aligned} f(f(b)) &= f(b)=b \\ &= f\circ f(b) \end{aligned}$$

由唯一性知：

$$b=a$$

2.3.3 不动点；

即

$$\{f(a), f(b)\}=\{a,b\}$$

2.3.4 不动点；

（1）无数个

例如，任取a,b，使得$\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$，其余$f(x)=x$或者$f(x)=\begin{cases} 0 & ，x=0 \\ \frac{1}{x} & ，其余 \end{cases}$或者$f(x)=-x$

（2）只有一个

$$f(x)\text{递增}\Rightarrow f\circ f(x)\text{递增}$$

若存在某个x使得$f(x)>x$，则

$$x=f\circ f(x)=f(f(x))\geqslant f(x)$$

同理$f(x)<x$也出现矛盾，故只能是

$$f(x)=x$$

2.3.5 观察、归纳；

（1）

$$f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}x^2}}$$

（2）

$$f^n(x)=\frac{x}{1+2^{n-1}bx}$$

2.3.6 迭代；

利用等比数列求和公式

$$f^{100}(m)=3^{100}(m+1)-1$$

❶一个初等证法

要证

$$1988\mid 3^{100}(m+1)-1$$

只须找出一个特例x满足条件：

$$1988\mid x-1\text{ 且 }3^{100}\mid x$$

注意到

$$1988\mid 1989-1\text{ 且 }3\mid 1989$$

若

$$1988\mid 1989^{100}-1$$

则得证；而由二项式定理可得：

$$k-1\mid k^n-1$$

❷利用裴蜀定理

设$(a,b)=d$，$ax+by=D$有整数解$\Longleftrightarrow D=md$；有整数解时必然有无穷多个整数解；
推论：互质$(a,b)=1\Longleftrightarrow ax+by=1$有整数解；

$$(3,1988)=1$$

于是

$$\left(3^{100},1988\right)=1$$

从而

$$3^{100}x+1988y=1$$

得证；

裴蜀定理的一个证明　辗转相除法

$\Longrightarrow$显然：若$(a,b)=d$，则对任意整数x,y都有$ax+by=md$；

$\Longleftarrow$即证$ax+by=md$有整数解；

只须证明$m=1$的情况；

$ab=0$的情况显然；$(a,b)=(a,-b)$，不妨设$a>b>0$；

$$\begin{aligned}\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y &= 1\\ \text{记作}Ax+By &= 1,\ \text{其中}\,(A,B)=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= q_1B+r_1,\ 0<r_1<B,\ r_1=0\text{说明}B=(A,B)=1,\text{取}\,(x=0,y=1)\,\text{结论得证} && (1)\\
B &= q_2r_1+r_2,\ 0<r_2<r_1,\ r_2=0\text{说明}r_1=(A,B)=1,\text{取}\,(x=1,y=-q_1)\,\text{结论得证} && (2)\\
r_1 &= q_3r_2+r_3,\ 0<r_3<r_2,\ r_3=0\text{说明}r_2=(A,B)=1 && (3)\\
\cdots & \quad \cdots\\
r_{k-2} &= q_kr_{k-1}+r_k,\ 0<r_k<r_{k-1},\ r_k=0\text{说明}r_{n-1}=(A,B)=1 && (4)\\
\cdots & \quad \cdots\\
\text{直至} & \quad \text{必有某个}r_N=1
\end{aligned}$$

不妨设

$$\begin{aligned}
r_{n-4} &= q_{n-2}r_{n-3}+r_{n-2},\ 0<r_{n-2}<r_{n-3},\ \text{\%\%\%\%\%\%\%\%同上\%\%\%\%\%\%\%\%} && (5)\\
r_{n-3} &= q_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1},\ 0<r_{n-1}<r_{n-2} && (6)\\
r_{n-2} &= q_nr_{n-1}\ +\ r_n\quad ,\ 0<r_n\ <r_{n-1} && (7)\\
r_{n-1} &= q_{n+1}r_n+1,\ \text{即}r_{n+1}=1 && (8)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\text{由(8)得},\quad X_{n-1}r_{n-1}+Y_nr_n &= 1\\
\text{带入(7)},\ X_{n-2}r_{n-2}+Y_{n-1}r_{n-1} &= 1\\
\text{带入(6)},\ X_{n-3}r_{n-3}+Y_{n-2}r_{n-2} &= 1\\
\text{带入(5)},\ X_{n-4}r_{n-4}+Y_{n-3}r_{n-3} &= 1\\
\cdots &\quad \cdots\\
\text{带入(4)},\ X_{k-2}r_{k-2}+Y_{k-1}r_{k-1} &= 1\\
\cdots &\quad \cdots\\
\text{带入(3)},\quad X_1r_1+Y_2r_2 &= 1\\
\text{带入(2)},\quad X_0B+Y_1r_1 &= 1\\
\text{带入(1)},\quad X_{-1}A+Y_0B &= 1
\end{aligned}$$

2.3.7　周期函数；

$$\forall y>x，\text{记}l=y-x，f(y)=f(x+y-x)=f(x)$$

2.3.8　按周期函数定义；

分别设$\sin x^2=\sin(x+T)^2$和$\sin x+\cos\sqrt{2}x=\sin(x+T)+cos\sqrt{2}(x+T)$，得到$T$的取值均与$x$相关；

2.3.9　奇偶性；

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

2.3.10 按奇偶性定义带入验算即可；

2.3.11 双曲正弦函数的反函数；

$$\begin{aligned}
y &= \sinh x \\
2y &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\
0 &= \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 \\
\mathrm{e}^x &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}, \text{注意到} \mathrm{e}^x > 0 \\
x &= \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

练习题2.4

August 9, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.4.1 左极限定义；

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ s.t.\ 0<x_0-x<\delta\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$$

2.4.2 按定义写出即可；

2.4.3 极限定义；

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ s.t.\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

（1）定义

$$\big||f(x)|-|A|\big|\leqslant|f(x)-A|<\varepsilon$$

（2）定义

$$|f^2(x)-A^2|=|f(x)+A||f(x)-A|<\big||2A|+\varepsilon\big|\varepsilon$$

（3）定义 $A>0,\ \varepsilon\ll A$

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{|\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}|}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{A-\varepsilon}+\sqrt{A}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$$

（4）定义 $\varepsilon\ll|A|$

$$\begin{aligned}|\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{A}| &< \max\left\{\left|\sqrt[3]{A\pm\varepsilon}-\sqrt[3]{A}\right|\right\}\\ &= \max\left\{\left|\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{(A\pm\varepsilon)^2}+\sqrt[3]{A\pm\varepsilon}\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{A^2}}\right|\right\}\\ \text{不妨设}A>0 &< \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{A^2}}\end{aligned}$$

2.4.4 极限定义；

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ s.t.\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

（1）定义

$$|x^3 - 8| = |x-2||x^2+2x+4| < \delta\left(3^2+6+4\right) < \varepsilon$$

（2）定义

$$\begin{aligned} |\frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6}| = |\frac{1}{x+3} - \frac{1}{6}| \quad &< \quad \max\left\{|\frac{1}{6\pm\delta} - \frac{1}{6}|\right\} \\ \text{注意}\delta \ll 6 \quad &= \quad \frac{\delta}{6-\delta} < \frac{\delta}{5} < \varepsilon \end{aligned}$$

（3）定义

$$|\frac{x^4-1}{x-1}| = |x+1||x^2+1| < (1+\delta+1)\left(2^2+1\right) < \varepsilon$$

（4）定义

$$|\sqrt{1+2x} - 1| = \frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1} < \frac{2(1+\delta)}{2} < \varepsilon$$

（5）定义

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ s.t.\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}| = |\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}| < \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{0+1}} < \varepsilon$$

2.4.5 极限定义；

（1）按定义验算

$$f(2+) = 4, \quad f(2-) = -2a$$

（2）由定理2.11

$$a = -2$$

2.4.6 极限定义；

设极限值为A，则

$$for\ \varepsilon = \frac{A-a}{2}, \cdots \text{即证}$$

2.4.7 极限定义；

设左右极限值分别为A, B，则

$$\text{取}\varepsilon = \frac{B-A}{2}, \cdots \text{取}\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \cdots f(x) < \frac{A+B}{2} < f(y)$$

2.4.8 极限定义；利用单调性；

先证$f(x)<A$

$$x_0-x_n<\varepsilon\Rightarrow x<x_n<x_0,\ f(x)\leqslant f(x_n)\leqslant A\text{（可用反证法）}$$

再用夹逼准则或者极限定义

$$x\to x_0\Rightarrow x_n<x<x_0,\ \text{且}x_0-x_n<\delta\ \cdots\ |f(x)-A|<|f(x_n)-A|<\varepsilon$$

2.4.9 极限不是l

取$\delta=\frac{1}{n}$

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall n\in N^*,\ \exists\, x_n\in\left(x_0,x_0\pm\frac{1}{n}\right),\ s.t.\quad |x_n-x_0|\geqslant\varepsilon_0$$

2.4.10 黎曼函数的推广；结果是0；

取

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\right\}\text{去掉其中的重复项}$$

不加入该条件，原题也可利用定理2.9

由于A_n是有限集，对于任意确定的n，总存在δ_n使得$(x_0,x_0\pm\delta_n)$不包括$A_1,A_2,\cdots,A_n$中的点；

于是任取收敛于x_0的数列$\{x_n\neq x_0:n=1,2,3,\cdots\}$，从某项起往后，总有$x_n\in(x_0,x_0\pm\delta_n)$，从而

$$f(x_n)=0\text{或}\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots;\ \text{总之},\ f(x_n)<\frac{1}{n}$$

2.4.11 四则运算、复合法则；

（1）-1；（2）$\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)x}\to 0$；（3）$\frac{(x-1)\left(x^{m-1}+\cdots+x+1\right)}{x-1}\to m$；（4）$\frac{(x-1)\left(x^{m-1}+\cdots+x+1\right)}{(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)}\to\frac{m}{n}$；

（5）$\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\to\frac{1}{2}$；（6）$\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\to\sqrt{2}$；（7）$\frac{(1+x)^{1/m}-1}{1+x-1}=\frac{1}{(1+x)^{1m-1/m}+\cdots+(1+x)^{1/m}+1}\to\frac{1}{m}$；

（8）$\frac{x-1+x^2-1+\cdots+x^m-1}{x-1}\to 1+2+\cdots+m=\frac{(1+m)m}{2}$；

（9）$\frac{1+nmx+\frac{1}{2}n(n-1)(mx)^2-\left[1+mnx+\frac{1}{2}m(m-1)(nx)^2\right]}{x^2}+\text{有限个}0=\frac{1}{2}n(n-1)m^2-\frac{1}{2}m(m-1)n^2$；

（10）$\left[\frac{T^m-1}{T^{m-1}+\cdots+T+1}+\frac{S^n-1}{S^{n-1}+\cdots+S+1}\right]\Big/x\to\frac{n}{m}-\frac{m}{n}$；

2.4.12 夹逼准则、直接代入；

（1）$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1$，从而$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$；（2）0，其中$[x\to 2^+]=2$；

（3）$\frac{5}{8}$，其中$[x\to 2^-]=1$；（4）$\frac{3}{2}$，其中$[4x]=3,\ x\to 1^-$；

2.4.13 利用练习题1.7第13题结论；

$$\mathrm{e}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},\ \text{其中}\frac{n}{n+1}<\theta_n<1$$

$$\begin{aligned}n\sin(2\pi n!\,\mathrm{e})&=n\sin\left[2\pi\left(N+\frac{\theta_n}{n}\right)\right]\\ n\sin\frac{1}{n+1}&<n\sin\left(2\pi\cdot\frac{\theta_n}{n}\right)<n\sin\frac{1}{n}\end{aligned}$$

2.4.14 注意定理2.8的条件：“在t_0的一个充分小的近旁，$g(t)\neq x_0$”

Shrek

练习题2.5

August 9, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.5.1 极限定义；

（1）

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ s.t.\ x<-X\Rightarrow|f(x)-\frac{1}{3}|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}|\frac{x^2+1}{3x^2-x+1}-\frac{1}{3}| &= |\frac{x+2}{9x^2-3x+3}|\\ &< \frac{|x|+2}{9x^2-|3x|-3}<\frac{|2x|}{9x^2-3x^2-3x^2}=\frac{2}{3|x|}<\varepsilon,\ \text{当}|x|\text{充分大时}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}|\frac{3x+2}{2x+3}-\frac{3}{2}|=|\frac{6x+4-3(2x+3)}{2(2x+3)}| &= |\frac{-5}{4x+6}|\\ &< \frac{5}{|4x|-6}<\varepsilon,\ \text{当}|x|\text{充分大时}\end{aligned}$$

（3）

$$\left|x-\sqrt{x^2-a}\right|=|\frac{x^2-\left(x^2-a\right)}{x+\sqrt{x^2-a}}|<\frac{|a|}{x}<\varepsilon,\ \text{当}x\text{充分大时}$$

（4）

$$\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right|=|\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}|<\frac{2}{\sqrt{x+1}}<\varepsilon,\ \text{当}x\text{充分大时}$$

2.5.2 通分、有理化；

（1）$a=1,b=-1$；（2）$a=\pm1,b=\mp\frac{1}{2}$；（3）$a=\pm1,b=\mp\frac{1}{2}$；

2.5.3 三角函数和差化积公式；

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1} &= 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\\ &= 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

2.5.4 利用上题结论；

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k} &= \sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k\left(\sin\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x}\right)+\sin\sqrt{x}\sum_{k=1}^{n}a_k\\ &= n\text{个}0+\text{函数}\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

注意

$$\frac{\sin\sqrt{x+k}}{\sin\sqrt{x}}\nrightarrow 1,\ \exists\left\{x_n\right\},\ \left|\frac{\sin\sqrt{x+k}}{\sin\sqrt{x}}-1\right|\geqslant\varepsilon_0$$

2.5.5 由上题得到启发；

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi\right)=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)\cos n\pi+\cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)\sin n\pi\to 0$$

2.5.6 四则运算、复合法则、两个重要极限；

（1）$\frac{a}{b}$；（2）2；（3）1；（4）1；（5）$\sin x$；（6）$\cos x$；（7）e^{-2}；

（8）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2} &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{1}{12}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\end{aligned}$$

（9）

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}sin\frac{x}{2^n}\Big/\frac{x}{2^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^n}sin\frac{x}{2^n}\Big/\frac{x}{2^n}=1$$

（10）利用（4）的结论

$$\lim_{x\to+\infty}x\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cot\left(\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\tan\left(\arctan x\right)}=1$$

2.5.7 $n\to\infty$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}+\infty & ,\ x>1\\ \mathrm{e} & ,\ x=1\\ 0 & ,\ x<1\end{cases}$$

2.5.8 极限的保号性；

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\Big/\sin x\right| &\leqslant 1\\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\lim_{x\to 0}\left(\sin kx/\sin x\right)\right| &\leqslant 1\end{aligned}$$

2.5.9　Cauchy收敛原理；可完全仿照定理2.9、定理2.10的证明；

2.5.10　反证法；

练习题2.6

August 21, 2013

1　第一章 实数和数列极限

2　第二章 函数的连续性

2.1　集合的映射

2.2　集合的势

2.3　函数

2.4　函数的极限

2.5　极限过程的其他形式

2.6　无穷小与无穷大

2.6.1　“定级”

（1）$x \to 0$的等价无穷小**（2）**$x \to \infty$的**10级无穷大（3）**$\frac{1}{x\to\infty}$**的3级无穷小**

（4）$x-1$**的同级无穷小（5）**$x \to \infty$**的2级无穷大（6）**$\frac{1}{x-1} \to \infty$**的同级无穷大**

（7）不能定出级来，但可以视作$|x| \to 0$**的等价无穷小**

（8）不能定出级来，但可以视作$|x| \to 0$**的**$\frac{1}{6}$**级无穷小**

（9）不能定出级来，但可以视作$|x| \to \infty$**的等价无穷大**

（10）$x \to 0$**的等价无穷小（11）**$x \to 0^+$**的**$\frac{1}{2}$**级无穷小（12）**$x \to 0$**的等价无穷小**

（13）$x \to \infty$**的**$\frac{1}{2}$**级无穷大（14）**$x \to \infty$**的**$\frac{n(n+1)}{2}$**级无穷大**

2.6.2　$o(\alpha)$的定义,极限的四则运算法则；

（1）

$$\lim \frac{o(\alpha) + o(\alpha)}{\alpha} = 0 + 0 = 0$$

（2）

$$\lim \frac{o(c\alpha)}{\alpha} = \lim \frac{o(c\alpha)}{c\alpha} c = 0 \cdot c = 0$$

（3）

$$\lim \frac{(o(\alpha))^k}{\alpha^k} = \left(\lim \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)^k = 0^k = 0$$

（4）

$$\lim \left(\frac{1}{1+\alpha} - 1 + \alpha\right)/\alpha = \lim \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)\,\alpha} = 0$$

2.6.3 注意等价无穷小替换的条件；

（1）

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x\,(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3\cdot \frac{1}{2}x^2} = 2$$

（2）

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = 1$$

（3）

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\frac{1}{2}x^2\,(1+\cos x)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)} = 0$$

（4）

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\tan x)}{\tan x}\frac{\tan x}{x} = 1$$

（5）

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1}{2x\cdot\left[1+\sqrt[n]{1+x+x^2}+\left(\sqrt[n]{1+x+x^2}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt[n]{1+x+x^2}\right)^{n-1}\right]} = \frac{1}{2n}$$

练习题2.7

August 22, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.6 无穷小与无穷大

2.7 连续函数

2.7.1 连续的定义；

（1）$f(x \to 0)$不存在；（2）除0以外的所有实数；（3）连续；

（4）不一定，如可去间断点；（5）$f(x) = 0$，否则不连续；

2.7.2 按定义或者几何直观；

（1）连续；（2）跳跃；（3）连续；（4）跳跃；（5）可去；

2.7.3 定义；

$$a = 0, b = 1, c = 0$$

2.7.4 极限的四则运算性质；可举例跳跃间断点；

（1）$f + g$不连续，反证；fg不一定；（2）均不一定；

2.7.5 极限的局部保号性；

2.7.6 反之不一定，可举例跳跃间断点；

2.7.7 极限的局部保号性；

任取一点x，只有$f(x) < g(x)$或$f(x) > g(x)$或$f(x) = g(x)$，

2.7.8　连续的定义；分类讨论x是连续点和间断点的情况；

2.7.9　先证F存在，$F(x+)$存在；再用反证法说明$F(x)=F(x+)$

不妨设f递增；利用定理2.9证明F的存在性

$$\forall\{t_n\neq x\}\to x^+,\text{ 取单调子列 }\{t_{k_n}\}\to x^+,\text{有下界 }\{f(t_{k_n})\}\to l,\text{由极限定义 }\{f(t_n)\}\to l$$

由极限的局部保号性，反证法说明F的单调性（递增），完全同上地，$F(x+)$也存在；

若存在$F(x)<F(x+)$，则

$$\exists\{t_n\neq x\}\to x^+,\ \{f(t_n)\}\to F(x)$$

$$\text{取 }\{T_k\neq x\}\to x^+,\text{ 则 }\{F(T_k)\}\to F(x+),\ \forall F(T_k),\ \exists\{s_m(k)\}\to T_k,\ s.t.\{f(s_m(k))\}\to F(T_k)$$

$$\text{于是可构造出 }\{s_n\neq x\}\to x^+,\ \{f(s_n)\}\to F(x+)$$

2.7.10　利用问题2.3.1的结论以及连续性；实数可以看作有理数列的极限；

练习题2.8

August 29, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.6 无穷小与无穷大

2.7 连续函数

2.8 连续函数与极限计算

2.8.1 消去0因子；

（1）$\frac{2}{3}$；**（2）**10；**（3）**7；**（5）第4小题中令**$a=1,n=n+1$**即得**$\frac{n(n+1)}{2}$；

（4）$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$；**归纳**；$x^2-2ax+a^2/x^n-na^{n-1}x+(n-1)\,a^n$**得**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & x^{n-2} & +2ax^{n-3} & +3a^2x^{n-4} & \cdots & & \cdots & +ka^{k-1}x^{n-k-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{除}/ & x^n & & & & & & & & & \\
- & x^n & -2ax^{n-1} & a^2x^{n-2} & & & & & & & \\
 & & 2ax^{n-1} & -a^2x^{n-2} & & & & & & & \\
- & & 2ax^{n-1} & -4a^2x^{n-2} & 2a^3x^{n-3} & & & & & & \\
 & & & 3a^2x^{n-2} & -2a^3x^{n-3} & & & & & & \\
- & & & 3a^2x^{n-2} & -6a^3x^{n-3} & 3a^4x^{n-4} & & & & & \\
 & & & & 4a^3x^{n-3} & -3a^4x^{n-4} & & & & & \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & ka^{k-1}x^{n-k+1} & -(k-1)\,a^kx^{n-k} & & \\
- & & & & & & & ka^{k-1}x^{n-k+1} & -2ka^kx^{n-k} & ka^{k+1}x^{n-k-1} & \\
 & & & & & & & & (k+1)\,a^kx^{n-k} & -ka^{k+1}x^{n-k-1} & \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \cdots & \cdots & +(n-2)\,a^{n-3}x & +(n-1)\,a^{n-2} & & \\
\text{除}/ & & & & & & -na^{n-1}x & +(n-1)\,a^{n} \\
 & \text{接上表} & \ddots & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & (n-2)\,a^{n-3}x^{3} & -(n-3)\,a^{n-2}x^{2} & \vdots & \vdots \\
- & & & & (n-2)\,a^{n-3}x^{3} & -2\,(n-2)\,a^{n-2}x^{2} & (n-2)\,a^{n-1}x & \vdots \\
 & & & & & (n-1)\,a^{n-2}x^{2} & (-2n+2)\,a^{n-1}x & \vdots \\
- & & & & & (n-1)\,a^{n-2}x^{2} & -2\,(n-1)\,a^{n-1}x & (n-1)\,a^{n} \\
 & & & & & & & \\
\text{余} & & & & & & 0 & 0
\end{array}
$$

2.8.2　消去0因子；$t^{n}-1=(t-1)\left(1+t+t^{2}+\cdots+t^{n-1}\right)$**；**

（1）$\frac{n}{m}$**；（2）**$\frac{\alpha}{m}$**；（3）**$\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$**；（4）**$\frac{1}{n!}$**；**

2.8.3　幂指函数；三角函数公式；定理2.9；等价无穷小替换；

（1）e^{-2}**；（2）**e^{2}**；（3）**1**；（4）**$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$**；（5）**e^{-1}**；**

（6）1**；（7）**e**；（8）**$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$**；（9）**$\mathrm{e}^{-\frac{x^{2}}{2}}$**；（10）**$\mathrm{e}^{2}$**；（11）**$\cot a$**；**

2.8.4　幂指函数；等比数列求和公式；$\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$**；**

练习题2.9

September 1, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.6 无穷小与无穷大

2.7 连续函数

2.8 连续函数与极限计算

2.9 一致连续性

2.9.1 观察图形；放缩构造$|x_2 - x_1|$；

（**1**）$s_n = \frac{1}{2n\pi},\ t_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$；（**2**）$\sin + \sin \leqslant 2,\ \sin - \sin = 2\cos\frac{}{2}\sin\frac{}{2} \leqslant |x_2 - x_1|$；

（**3**）$0 \leqslant (a-b)^3 \leqslant a^3 - b^3$；（**4**）$\sin - \sin \leqslant |x_2^2 - x_1^2|$；（**5**）$s_n = 2n\pi,\ t_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$；

2.9.2 取$\min\{\delta_1, \delta_2\}$；

2.9.3 先证有界闭区间上的连续函数一致连续；

反正法：若存在$s_n, t_n \cdots$，则由列紧性定理$s_{k_n} \to l \in [a,b]$，而$\left|t_{k_n} - l\right| \leqslant \left|t_{k_n} - s_{k_n}\right| + \left|s_{k_n} - l\right|$（无穷小）说明$t_{k_n} \to l$，假设与Cauchy收敛原理相矛盾；

再取T_1, T_2, T_3三个区间：长度均为周期T，且T_1, T_3分别包含T_2的左右端点，则$T_1 + T_2 + T_3$上一致连续；任取两点$|x_1 - x_2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，必然可转化为$T_1 + T_2 + T_3$内；

处理$\sin x^2$的常用方法：$s_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\ t_n = \sqrt{2n\pi}$

2.9.4 Cauchy收敛原理；

一致连续"$\varepsilon - \delta$"，则(a,δ)内任意两点x_1, x_2总有$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$，此即$f(a+)$；

练习题2.10

September 1, 2013

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.6 无穷小与无穷大

2.7 连续函数

2.8 连续函数与极限计算

2.9 一致连续性

2.10 有限闭区间上的连续函数

2.10.1 练习题2.9.4；

2.10.2 参考练习题2.9.4，有限区间可补充定义成有限闭区间；无穷区间如$x \cdot x$

2.10.3 补充定义成有限闭区间；

2.10.4 分段，Cauchy收敛原理；

2.10.5 利用上题结论；利用$f+g$一致连续, 取$\min\{\delta_1, \delta_2\}$；

2.10.6 零值定理证存在，反证唯一；实际上三次方程是可解的；

2.10.7 远离原点时，$|\varphi(x)| < \varepsilon |x^n|$；

（1）有正有负，零值定理；

（2）继续远离原点时，更大，最值定理；

2.10.8 归纳；

注意$x_1 = 0$，记$F_n(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$

$$若 f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f(0),\ 则 F_2(0)\, F_2\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$若f\left(\frac{1}{3}\right)\neq f(0),\ 则F_3(0)\left[F_3\left(\frac{1}{3}\right)+F_3\left(\frac{2}{3}\right)\right]<0$$

$$若f\left(\frac{1}{n}\right)\neq f(0),\ 则F_n(0)\left[F_n\left(\frac{1}{n}\right)+F_n\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+F_n\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]<0$$

对$[F_n+\cdots+F_n]$的均值用介值定理，再由零值定理即得证；

2.10.9　图像上能直接看出来；介值定理；

$f(+\infty)=+\infty,\ a\in[f(a),+\infty)$，于是$f\circ f$在$[a,+\infty)$上有最小值；

2.10.10　值域是区间于有理数的可列性相矛盾；

2.10.11　定义；图形上显然，$f(x)$一致连续，x足够小时$f(x)<x$，x足够大时$f(x)>x$；

练习题2.11

July 19, 2014

1　第一章 实数和数列极限

2　第二章 函数的连续性

2.1　集合的映射

2.2　集合的势

2.3　函数

2.4　函数的极限

2.5　极限过程的其他形式

2.6　无穷小与无穷大

2.7　连续函数

2.8　连续函数与极限计算

2.9　一致连续性

2.10　有限闭区间上的连续函数

2.11　上极限下极限

要点：上极限是最大的聚点（定理2.27）；

2.11.1　上下极限代表了两个列（聚点），用介值定理可得到一个列，正是聚点α；

2.11.2　均可直接观察出；

（1）$1,-1$；**（2）**$-\infty,+\infty$；**（3）**$-\infty,+\infty$；

2.11.3　利用聚点的概念；完全仿照数列的情况；$\pm\infty$的情况均单独讨论；

（1）　随着范围缩小，上界不增下界不减；

（2）　上一小题和定理2.28的1°说明了α,β的存在性（单调有界）；

任意一个列$f\left(|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\right)<\psi\left(\frac{1}{n}\right)$，那么$f\left(x_n\to x_0\right)$的任意聚点都小于等于$\beta$，只须排除$\limsup f\left(x\right)<\beta$即可，由定理2.27的$2^\circ$；

练习题2.12

August 15, 2014

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.2 集合的势

2.3 函数

2.4 函数的极限

2.5 极限过程的其他形式

2.6 无穷小与无穷大

2.7 连续函数

2.8 连续函数与极限计算

2.9 一致连续性

2.10 有限闭区间上的连续函数

2.11 上极限下极限

2.12 混沌现象

要点：引理2.3

2.12.1 按定义；

2.12.2 就是准备证明定理2.30；

仿照定理2.29的证明：记$x, f(x), f^2(x), f^3(x)$为$\alpha<\beta<\gamma<\delta$，只有如下9种情况

$$\begin{bmatrix} & & \gamma & \\ & & & \delta \\ \alpha & & & \\ & \beta & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \gamma & \\ & \beta & & \\ \alpha & & & \\ & & & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \beta & & \\ & & & \delta \\ \alpha & & & \\ & & \gamma & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \gamma & \\ \alpha & & & \\ & & & \delta \\ & \beta & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \beta & & \\ \alpha & & & \\ & & & \delta \\ & & \gamma & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \beta & & \\ \alpha & & & \\ & & \gamma & \\ & & & \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & & & \delta \\ & & \gamma & \\ & \beta & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & & \delta \\ & & \gamma & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ & & & \delta \end{bmatrix}$$

无论哪种情况都能找出两个区间满足$f(J_1) \supset J_2$，$f(J_2) \supset J_1$，运用引理2.3即得到所需结论；

2.12.3 有上题结论直接(归纳)得出；

2.12.4 介值定理；$f^i(I_0) \supset I_i$

练习题3.1

August 15, 2014

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

3 第三章 函数的导数

3.1 导数的定义

3.1.1 按$f'(0)$定义；

3.1.2 按$f'(0)$定义；

$$\begin{aligned}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} &= \frac{f(b_n)-f(0)-f(a_n)+f(0)}{b_n-a_n}\\ &= \frac{b_n}{b_n-a_n}\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}+\frac{-a_n}{b_n-a_n}\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\\ &= \beta\quad\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}+\quad\alpha\quad\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}\end{aligned}$$

注意到

$$0<\beta,\alpha<1\text{且}\beta+\alpha=1$$

故按“份额”分配：

$$\begin{aligned}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(0) &= \beta\quad\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}-f'(0)\quad+\quad\alpha\quad\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}-f'(0)\\ \left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(0)\right| &\leqslant \left|\quad\beta\quad\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}-f'(0)\right|\quad+\left|\quad\alpha\quad\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}-f'(0)\right|\\ &\leqslant \left|\quad 1\quad\underbrace{\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n}-f'(0)}_{\text{极限为0}}\right|\quad+\left|\quad 1\quad\underbrace{\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n}-f'(0)}_{\text{极限为0}}\right|\end{aligned}$$

3.1.3 利用上题结论，偶函数，取$a_n=-b_n$即可；

3.1.4 与第2题完全相同，或直接利用其结论；

3.1.5 切线；

切线即斜率

$$k=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$$

（1）$(2,4)$**（2）**$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$**（3）作图易得斜率为**$\frac{1}{2}$**或**$-2$**，**$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)(-1,1)$

3.1.6 **垂直即$k_1k_2=-1$；**

3.1.7 **可导必连续；**

$$\frac{f\left(a+1/n\right)-f\left(a\right)}{f\left(a\right)}=\alpha=O\left(1\right),n\to\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+1/n\right)}{f\left(a\right)}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+1/n\right)-f\left(a\right)}{f\left(a\right)}+1\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left[n\alpha\ln\left(\alpha+1\right)^{1/\alpha}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left[n\cdot\frac{f\left(a+1/n\right)-f\left(a\right)}{f\left(a\right)}\ln\left(\alpha+1\right)^{1/\alpha}\right] \\
&= \exp\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+1/n\right)-f\left(a\right)}{1/n}\frac{1}{f\left(a\right)}\ln\left(\alpha+1\right)^{1/\alpha}\right] \\
&= \exp\frac{f'\left(a\right)}{f\left(a\right)}
\end{aligned}$$

3.1.8 **按定义；**

$\varphi\left(a\right)$连续，则$f\left(a\right)=0$，$g\left(a\right)=0$均连续

于是，在a的近旁：

$$\lim\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\lim\frac{f\left(x\right)}{x-a}=\lim\varphi\left(x\right)=\varphi\left(a\right)$$

$$\frac{g\left(x\right)-g\left(a\right)}{x-a}=\frac{g\left(x\right)}{x-a}=\frac{\left|x-a\right|}{x-a}\varphi\left(x\right)\Longleftrightarrow\begin{cases}-\varphi\left(a\right) & \text{左极限}\\ \varphi\left(a\right) & \text{右极限}\end{cases}$$

3.1.9 **按定义计算；**

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^3-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^3=8$$

$$f'\left(1\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^3-0}{x-1}=\lim_{x\to1}x\left(x-1\right)\left(x-2\right)^3=0$$

$$f'\left(2\right)=\lim_{x\to2}\frac{x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^3-0}{x-2}=\lim_{x\to2}x\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^2=0$$

3.1.10 **按定义计算；**

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^\lambda\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}x^{\lambda-1}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & M & \lambda>1\\ \infty & 'periodic' & \lambda\leqslant1\end{cases}$$

练习题3.1

August 16, 2014

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

3 第三章 函数的导数

3.1 导数的定义

3.2 导数的计算

3.2.1 熟悉公式

（1）$3x^2-2$（2）$\frac{1}{2}x^{-1/2}+x^{-2}$（3）$-a\sin x+b\cos x$（4）$\frac{3}{5}x^{-2/5}+\sin x+x\cos x$（5）$\frac{6}{x}+ab\exp bx$
（6）$\frac{1}{x\ln a}+a^x b\ln a$（7）$\sin x^2+2x^2\cos x^2$（8）

$$\frac{ab}{\cos^2 bx}+\frac{ab}{1+a^2x^2}$$

（9）$\frac{1}{3}x^{-2/3}\cos x+x^{1/3}\sin x$（10）$3x^2(ax+b)+a\left(x^3+1\right)$（11）

$$\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

（12）$a^x\ln a\ln x+a^x/x$（13）$\ln x+1$（14）$a^x\ln a\tan x+a^x/\cos^2 x$（15）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2x\arctan x+x^2/\left(1+x^2\right)$（16）

$$\frac{(\ln x+1)\left(1+x^2\right)-2x^2\ln x}{(1+x^2)^2}$$

（17）$\frac{(-s-c)(c+s)-(c-s)(-s+c)}{(c+s)^2}=1-\frac{3}{1+2sc}$（18）

$$\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$$

（19）$(\ln x+1)\sin x+x\ln x\cos x$（20）$3\sin^2 x\cos x$（21）$a\mathrm{e}^{ax}\cos bx-b\mathrm{e}\sin bx$（22）

$$\frac{1+x\left(a^2+x^2\right)^{-1/2}}{x+(a^2+x^2)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

（23）$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$（24）$\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$（25）

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

（26）$\frac{-s+c}{c+s}$（27）$\cos\ln x-\sin\ln x+x\left(-\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}-\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-2\sin\ln x$（28）$a^{\sin x}\ln a\cdot\cos x$（29）

$$\frac{1+x\arcsin x/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

（30）

$$y'=\left(\exp x^x\ln x\right)'=x^{x^x}\left(x^x\ln x\right)'=x^{x^x}\left[x^x\left(\ln x+1\right)\ln x+x^{x-1}\right]$$

（31）$\sinh x$（32）$\cosh x$

3.2.2　求和；

$$S_n=1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

（1）

$$S_n'=\frac{-\left(n+1\right)x^n\left(1-x\right)+1-x^{n+1}}{\left(1-x\right)^2}=\frac{nx^{n+1}-\left(n+1\right)x^n+1}{\left(1-x\right)^2}$$

（2）

$$S_n'\left(x=\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^{n-2}}+4$$

（3）+（1）得

$$2\times1+3\times2x+4\times3x^2+\cdots+\left(n+1\right)\times nx^{n-1}=S"_{n+1}$$

3.2.3　按定义；

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\frac{f\left(x+T\right)-f\left(a+T\right)}{\left(x+T\right)-\left(a+T\right)}$$

3.2.4　按定义；

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}=\begin{cases}\frac{-f(-x)+f(-a)}{x-a}\\ \frac{f(-x)-f(-a)}{x-a}\end{cases}$$

图形关于原点对称，则对称点处的斜率相同；图形关于y轴对称，则对称点处的斜率为相反数；

3.2.5　图形上很明显；利用极限的局部保号性来说明；

不变号⇒$f\left(x\right)-f\left(a\right)$与$f\left(x\right)-f\left(b\right)$不变号，注意到$a<x<b$，则

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a}\text{与}\frac{f\left(x\right)-f\left(b\right)}{x-b}\text{反号}$$

导数反号⇒由于邻域内(局部)保号，两个邻域内的$f\left(x\right)$同号；若有变号$f\left(c\right)$，由零值定理，$\left(a,c\right)$ $\left(c,b\right)$上各有一个根，这样$f\left(x\right)$就有了4个根，与“三次多项式”条件矛盾

3.2.6　完全同上；

3.2.7　切线；

双曲线$xy=a>0$，切线斜率

$$k=\frac{-a}{x_0^2}$$

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$$

与坐标轴交于

$$\left(X=2x_0,0\right)\text{及}\left(0,Y=2y_0\right)$$

围得面积$2a$

3.2.8 切线；

抛物线$y^2 = 2ax$，焦点$(a/2, 0)$；切线即斜率（不妨设$y > 0$）

$$k = f'(x_0) = \sqrt{a/2x_0}$$

垂线

$$y - y_0 = \frac{-1}{k}(x - x_0)$$

求焦点的对称点(X, Y)

$$\begin{cases} (X - a/2) \cdot 1 + (Y - 0)\left(\frac{-1}{k}\right) = 0 \\ \frac{X + a/2}{2} - x_0 = -k\left(\frac{Y+0}{2}\right) \end{cases}$$

得到$Y = y_0$

3.2.9 已知深度变化率，求体积变化率（cm^3/s）；

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{3^2}h \\ \dot{V} &= \frac{\pi}{9}h^2\dot{h} \\ &= \frac{\pi}{9} \times 12^2 \times 1 \end{aligned}$$

练习题3.1

August 19, 2014

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

3 第三章 函数的导数

3.1 导数的定义

3.2 导数的计算

3.3 高阶导数

3.3.1 熟悉公式

（1）

$$e^{-x^2}(-2x) \dashrightarrow e^{-x^2}(-2x)(-2x) - 2e^{-x^2}$$

（2）

$$2xa^x + x^2a^x\ln a \dashrightarrow 2a^x + 2xa^x\ln a + 2xa^x\ln a + x^2a^x(\ln a)^2$$

（3）

$$\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-1/2}(-2x) \dashrightarrow -2\left(a^2-x^2\right)^{-3/2}x - \left(a^2-x^2\right)^{-1/2}$$

（4）

$$-\left(a+\sqrt{x}\right)^{-2}\frac{1}{2}x^{-1/2} \dashrightarrow \left(a+\sqrt{x}\right)^{-3}\frac{1}{2}x^{-1} + \left(a+\sqrt{x}\right)^{-2}\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

（5）

$$\frac{1}{\cos^2 x} \dashrightarrow \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

（6）

$$2x\arctan x + 1 \dashrightarrow 2\arctan x + 2x\frac{1}{1+x^2}$$

（7）

$$\frac{\cos x}{\sin x} \dashrightarrow \frac{-1}{\sin^2 x}$$

（8）

$$\frac{1-\arcsin x\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-x)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

$$\dashrightarrow -\left(1-x^2\right)^{-2}(-2x) + \frac{\left(\arcsin x + x\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right)\left(1-x^2\right)^{3/2} - x\arcsin x\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{1/2}(-2x)}{\left(1-x^2\right)^3}$$

（9）

$$3x^2\cos x - x^3\sin x \dashrightarrow 6x\cos x - 3x^2\sin x - 3x^2\sin x - x^3\cos x$$

（10）

$$\ln x + 1 \dashrightarrow \frac{1}{x}$$

3.3.2　按定义；

（1）

$$2e^{2x-1} \dashrightarrow 4e^{2x-1}$$

（2）

$$\frac{1}{1+x^2} \dashrightarrow -\left(1+x\right)^{-2}\left(2x\right)$$

（3）

$$2\sin x\cos x = \sin 2x \dashrightarrow 2\cos 2x$$

3.3.3　Leibniz公式；

（1）

$$\left(\begin{array}{c}10\\0\end{array}\right)\left(1+x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(10)} + \left(\begin{array}{c}10\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(9)} = \left(1+x\right)\frac{19!!}{2^{10}}\left(1-x\right)^{-21/2} + \frac{10\times 17!!}{2^9}\left(1-x\right)^{-19/2}$$

（2）

$$\left(\begin{array}{c}10\\0\end{array}\right)x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)} + \left(\begin{array}{c}10\\1\end{array}\right)2x\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(7)} + \left(\begin{array}{c}10\\2\end{array}\right)2\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(6)} = \frac{x^2\cdot 8!}{\left(1-x\right)^9} + \frac{20x\cdot 7!}{\left(1-x\right)^8} + \frac{90\cdot 6!}{\left(1-x\right)^7}$$

3.3.4　待定系数法；多项式，利用导数化简求解；

$$a\left(x-2\right)^4 + b\left(x-2\right)^3 + c\left(x-2\right)^2 + d\left(x-2\right) + e$$

$$\begin{aligned} e &= f\left(2\right) \\ d &= f'\left(2\right) \\ 2c &= f"\left(2\right) \\ 4b &= f^3\left(2\right) \\ a &= 3 \end{aligned}$$

3.3.5　按定义；题目应为“当$x > x_0$时”

$F\left(x\right)$连续要求

$$F\left(x_0+\right) = c = f\left(x_0\right)$$

$F'\left(x\right)$连续要求

$$F'_+\left(x_0\right) = \lim_{x\to x_0+}\frac{a\left(x-x_0\right)^2 + b\left(x-x_0\right) + c - F\left(x_0\right)}{x-x_0} = b = f'_-\left(x_0\right)$$

$F"\left(x_0\right)$要求

$$F"_+\left(x_0\right) = \lim_{x\to x_0+}\frac{2a\left(x-x_0\right) + b - F'\left(x_0\right)}{x-x_0} = 2a = f"_-\left(x_0\right)$$

练习题3.4

August 26, 2014

1 第一章 实数和数列极限

2 第二章 函数的连续性

3 第三章 函数的导数

3.1 导数的定义

3.2 导数的计算

3.3 高阶导数

3.4 微分中值定理

3.4.1 反证；驻点；

否则，由Rolle定理，$(\alpha,\beta)\subset[0,1]$上有驻点，而由定义解出的驻点只能是$\pm1$；

3.4.2 Rolle定理；

不管是极限还是无穷，由于连续，总能取到（介值定理）

$$f(a+\varepsilon_1)=f(b-\varepsilon_2)$$

3.4.3 Lagrange中值定理；

（1）

$$|\sin x-\sin y|=|(\cos\xi)(x-y)|$$

（2）

$$x^p-y^p=p\xi^{p-1}(x-y),\ y<\xi<x$$

（3）

$$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),\ b<\xi<a$$

（4）

$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),\ b<\xi<a$$

3.4.4 Rolle中值定理；

$$f-P\text{有n+1个不同的根}$$
$$f'-P'\text{有n个不同的根}$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$f^{(n)}-P^{(n)}\text{有1个根}$$

3.4.5 构造函数;

$$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f'(x) &= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \end{aligned}$$

3.4.6 图形上很明显;用定义写出来即可;

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ s.t.\ x>X\Rightarrow f'(x)<\varepsilon$$

Lagrange中值定理,只要足够靠后,函数的任意割线的斜率可以是任意小

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ s.t.\ x,y>X\Rightarrow\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)<\varepsilon$$

$$f(x)=f(y)+f'(\xi)(x-y)$$

$$\text{不妨设}y<x,\ \frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)+f'(\xi)(x-y)}{x}\to f'\left(\xi_{y\text{不变},x\to\infty}\right)<\varepsilon$$

完整写出来就是

$$\forall\varepsilon>0\quad,\quad\exists Y>0,\ s.t.\ x>Y\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{f(x)-f(Y)}{x-Y}=f'(\xi>Y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \left|\frac{x-Y}{x}\right|<1\end{cases}$$

$$\exists X>Y,\ s.t.\ x>X\Rightarrow\left|\frac{f(Y)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

3.4.7 图形上显然;

只要找一个$f(x)$无穷与$f'(\xi)$无界之间的等式即可,Lagrange中值定理

$$\begin{aligned} x<y\in(0,a)\ \ f(x)-f(y) &= f'(\xi)(x-y) \\ \text{对于给定的}y,\ x\to0+\ \ \infty &= f'(\xi)(-y) \end{aligned}$$

在$(0,y)$中有一点$f'(\xi)=-\infty$,而y是任意取定的;完整的写出来就是

$$\begin{aligned} \forall M>0,\ \text{任取}y\in(0,a),\ \exists0<\delta<y\ s.t.\ 0<x<\delta\quad &\Rightarrow\quad f(x)-f(y)>aM \\ &\exists\quad f'(\xi)(x-y)>aM \\ &\qquad f'(\xi)<\frac{aM}{x-y}<\frac{aM}{-a}=-M \end{aligned}$$

3.4.8 Lagrange中值定理;

本书常见的

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0,\ when\ x>0$$

本节自然想到Lagrange中值定理

$$\frac{f(2)}{2}-\frac{f(1)}{1}=\left(\frac{f(\xi)}{\xi}\right)'(2-1)=0$$

3.4.9 Cauchy中值定理；

❶本书常见的

$$\left(\frac{x}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}\text{或}\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

分母若能消掉，想到Cauchy中值定理

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{f^2(x)}\text{或}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$$

左边正好是

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

❷一个常用方法

$$\begin{aligned} f(\xi)-\xi f'(\xi)-\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} &= 0 \\ \text{记作 } f(\xi)-\xi f'(\xi)-K &= 0 \end{aligned}$$

寻找“原函数”以利用Rolle定理

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi)-\xi f'(\xi)-K}{\xi^2} &= 0 \\ \text{因为 } \xi\in(a,b) \text{ 不妨设} a,b>0 \qquad & \text{则} \xi>0 \end{aligned}$$

$$\frac{-f(x)}{x}+\frac{K}{x}$$

正好满足定理条件；

3.4.10 图像上显然；Lagrange中值定理；

非常值非线性则必有一点$(c,f(c))$落在直线$(a,f(a))-(b,f(b))$外

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\text{与}\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\text{总是一大一小于}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

3.4.11 导数恒为0的函数是常函数；

3.4.12 把结论代入条件；

❶从条件推导出三角函数不容易，但作为证明题，试将结论代入条件，自然就出现三角函数了；反证法，试将

$$y(x)-\lambda\cos x-\mu\sin x=g(x)$$

代入条件，看看$g(x)\neq 0$时能否推出矛盾，发现$g(x)$也满足微分方程$y"+y=0$，实际上从结论出发，正弦函数和余弦函数的任意线性组合$l(\cos x,\sin x)$都满足原微分方程，如果结论是对的，一定有$g(x)=l$（l表示一种状态$g\in span(\cos x,\sin x)$，而不是具体的某个函数）；根据题目提示，代入等效条件得

$$\begin{aligned} g^2 &= y^2+ly+l^2 \\ g'^2 &= y'^2+l'y'+l'^2 \\ g^2+g'^2 &= y^2+y'^2+ly+l'y'+l^2+l'^2 \\ C &= K+ly+l'y'+l^2+l'^2 \end{aligned}$$

平方项化为常数了，注意到$l'=l$，看看能否选取合适的两个合适的l，直接解出y来，最简单的

$$\begin{aligned} (y+\sin x)^2+(y+\sin x)'^2 &= C \\ (y+\cos x)^2+(y+\cos x)'^2 &= C \end{aligned}$$

同样地，C也表示一种状态即为常数，而不是具体的某个数

$$\begin{aligned} y\sin x + y'\cos x &= C \\ y\cos x - y'\sin x &= C \end{aligned}$$

不妨设$cosx \neq 0$

$$\begin{aligned} y\frac{\sin^2 x}{\cos x} + y'\sin x &= C\frac{\sin x}{\cos x} \\ y\cos x - y'\sin x &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\frac{\sin^2 x}{\cos x} + y\cos x &= C\frac{\sin x}{\cos x} + C \\ y\sin^2 x + y\cos^2 x &= C\sin x + C\cos x \end{aligned}$$

❷根据题目提示和结论，也可能直接想到：凑出y和y'的某种线性组合$= l$，然后解出来；

3.4.13 理解结论“导函数没有第一类间断点”；

❶由L'Hospital法则（3.6节）易证；❷Lagrange中值定理；
由定义

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} f^{(n)}(\xi),\ \xi \in (0,x)\, or\, (x,0) \\ &= \lim_{\xi\to 0} f^{(n)}(\xi) \end{aligned}$$