



# 我们如何计算散射

刘元彻 刘宇航<sup>1</sup>

2023 年 4 月 15 日

**摘要:** 原子物理主要研究组成物质的原子、分子以及他们之间的相互作用；在现代原子物理学的研究中，散射问题备受物理学家们关注，利用粒子的散射过程，我们可以很好地研究粒子之间的相互作用，甚至洞察新物理的存在。本文试以原子物理中最常见的 Rutherford 散射为例，利用经典力学、非相对论性量子力学和量子场论的方法分别计算其散射振幅 (Scattering Amplitude) 和散射截面，并比较这些方法之间的优劣。

**关键词:** 原子物理, Rutherford 散射, 微扰论, 量子力学, 量子场论

## 1 问题简介

Rutherford 散射由 Rutherford 提出的原子模型引出。实验中，在一个小铅盒里放有少量的放射性元素钋，它发出的  $\alpha$  粒子从铅盒的小孔射出，形成很细的一束射线射到金箔上。 $\alpha$  粒子穿过金箔后，打到荧光屏上产生一个个的闪光，这些闪光可以用显微镜观察到。整个装置放在一个抽成真空的容器里，荧光屏和显微镜能够围绕金箔在一个圆周上转动，如图1.1所示。

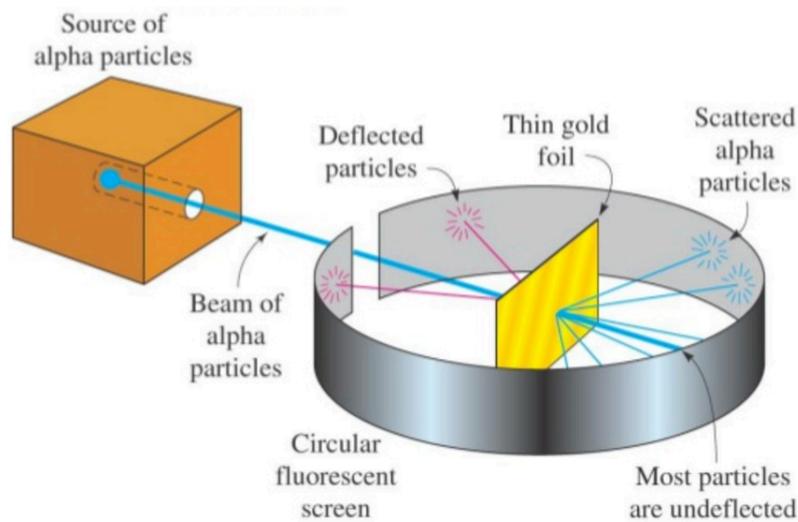


图 1.1: Rutherford 散射实验装置示意图

## 2 一般散射问题的理论指南

散射过程是指由于空间小区域中的相互作用导致的粒子从一个自由粒子态向另一个自由粒子态的跃迁，而散射问题的核心是散射截面的计算。以散射核为中心，在  $(\theta, \phi)$  处的粒子数密度分布情况是实验上具体可观测量，理论的任务便是建立该可观测测量与微观相互作用之间的联系，从而从实验上测得的粒子分布规律倒退得到相互作用细节。具体来说，即计算在  $(\theta, \phi)$  处单位立体角内分布的粒子数  $\frac{dn}{d\Omega}$ ；显然，当把入射粒子束视作均匀束流时，密度角分布正比于几何量  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ，称为 (微分) 散射截面，其中  $\sigma$  的意义见下文图4.1. 散射截面函数的具

<sup>1</sup> 中国科学技术大学物理学院



体形式直接由相互作用细节信息决定，而不依赖于入射粒子和靶核的种类。出于实际和一些方便的原因，我们总是考虑固定靶核的散射过程（无论是由外界固定还是选取质心参考系），在这样的过程中，入射粒子和靶核直接没有能动量的传递，称为弹性散射过程；而由定义，散射过程的相互作用只发生在很小的空间区域内，因而我们的相互作用行为总是局域支撑的，而入射态和出射态也都是自由粒子态。

下面我们聚焦在卢瑟福散射上，是说这里我们的相互作用是 Coulomb 静电相互作用。

### 3 经典力学算法

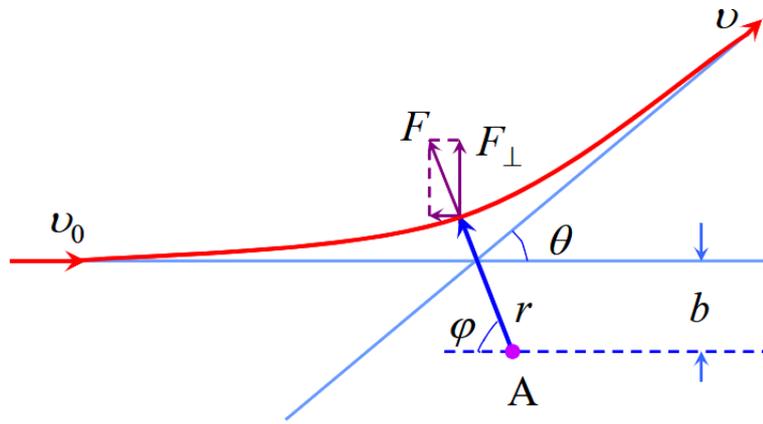


图 3.1:  $\alpha$  粒子与原子的散射示意图

现在我们来考察经典力学如何计算卢瑟福散射。为了方便，我们采用如图3.1所示的符号。这里，A 点即为原子核所在的位置（根据 Rutherford 的原子模型，原子核可以被认为是一个带有电荷量  $+Ze$  的质点）。入射  $\alpha$  粒子的初始速度为  $v_0$ ，其初始与原子核的横向距离<sup>2</sup>为  $b$ 。在经典力学的框架下，这是一个有心力场散射问题，因而我们可以首先写出角动量守恒式：

$$\begin{aligned} L &= mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = mv_0 b \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{v_0 b} \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

末态条件为：

$$v_{\perp} = v_0 \sin \theta \quad (2)$$

在整个散射过程中，我们可以写出  $\alpha$  粒子受到的垂直方向作用力：

$$F_{\perp} = F \sin \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \sin \varphi \quad (3)$$

<sup>2</sup>也被称为瞄准距离。横向指的是垂直于粒子初速度的方向



考虑到横向的动量定理，并利用角动量守恒式(1)消去  $r$ ，可以给出：

$$dv_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} dt \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{\perp} = v_0 \sin \theta &= \int_0^{\pi-\theta} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

另外，在 Rutherford 散射中，利用角动量守恒和能量守恒，我们可以给出 Coulomb 散射公式：

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \quad (6)$$

其中  $D$  是 Coulomb 散射因子，定义如下：

$$D = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{zZe^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{2E} \quad (7)$$

在真实的实验中，我们不可能知道发生碰撞的原子核具体在哪里，因而不可能直接测量  $b$ 。但是，利用如上式(7)，我们可以消掉参数  $b$ 。另外，在真实实验中，我们的可观测量是微分散射截面  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 。根据几何关系如图3.3，

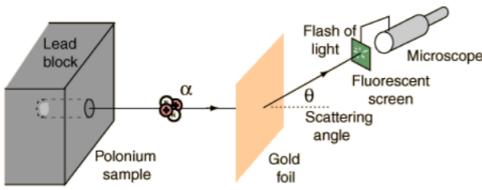


图 3.2: Rutherford 散射实验探测装置示意图

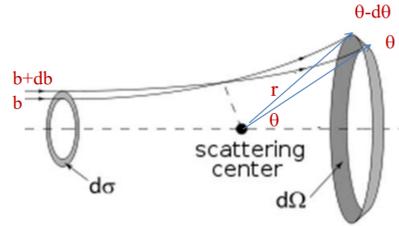


图 3.3: 微分散射截面的几何关系

我们知道：

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db \\ &= \frac{\pi D^2 \cos(\theta/2)}{4 \sin^3(\theta/2)} d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{S}{r^2} = \frac{2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{r^2} \\ &= 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

于是我们给出 Rutherford 散射的微分散射截面公式：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{D^2}{16 \sin^4(\theta/2)} \\ &= \frac{z^2 Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \end{aligned} \quad (10)$$

定义精细结构常数  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$ ，可将结果表为：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 z^2 Z^2 c^2 \hbar^2}{4m^2 v_0^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (11)$$

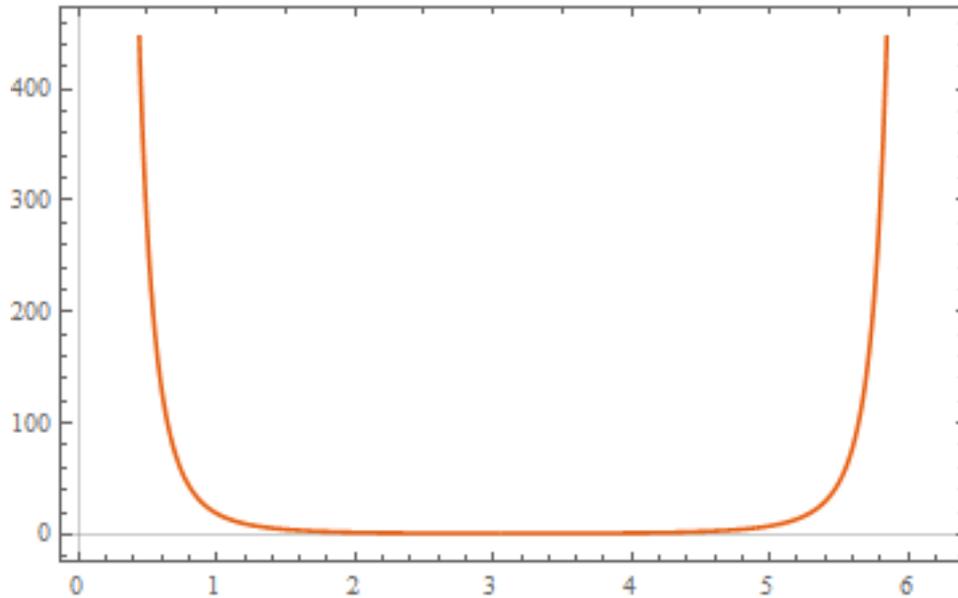


图 3.4: Rutherford 微分散射截面与  $\theta$  的关系

#### 4 非相对论量子力学散射<sup>[1]</sup>

上文计算了经典质点图像和牛顿力学下散射截面的计算结果。量子力学中，我们以 Hilbert 空间中的态矢或波函数描述粒子的状态，因而散射图像略有不同：如图，入射态为同种粒子无色散平面波，出射态同为自由粒子态，是未经散射的平面波和散射球面波的叠加。

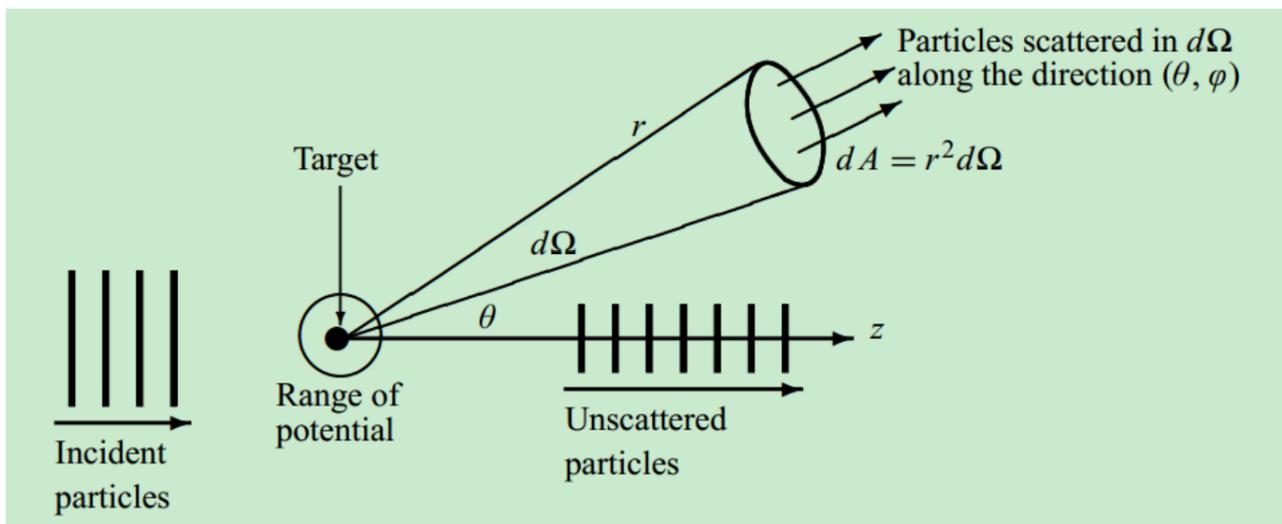


图 4.1: 散射图像

具体来说，态函数为叠加态

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} + \psi_{\text{scatt}}(\vec{r})$$

其中  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$  为粒子动量，我们取散射核为坐标原点。第一项包含了入射波和出射波未被散射的部分，第二项为被散射粒子的波函数。出于综述的理由，散射的相互作用是局域在核附近的，因此当  $r \rightarrow \infty$  时我们期望



散射项正比于没有相互作用势，即自由粒子行为，一个简单的球面波  $\frac{e^{ikr}}{r}$ ，其中  $k$  没有发生变化是因为我们假设入射粒子在弹性散射中是没有动量改变的。于是

$$\psi(\vec{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

其中  $f(\theta, \phi)$  被称为散射振幅，明显其物理意义是沿不同方向的角概率分布振幅；我们预期  $f(\theta, \phi)$  与微分散射截面是直接相关的，事实的确如此。

对波函数  $\psi(\vec{r})$  来讲概率流密度为  $J_i = \frac{i\hbar}{2\mu}(\psi\partial_i\psi^* - \psi^*\partial_i\psi)$ ，因而对于散射情形有意义的流是径向分量

$$J_s = \frac{i\hbar}{2\mu}(\psi_s\partial_i\psi_s^* - \psi_s^*\partial_i\psi_s) \quad (12)$$

$$(13)$$

$\mu$  是粒子质量。取  $r \rightarrow \infty$  得到渐进行为

$$J_s \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{i\hbar}{2\mu}|f(\theta, \phi)|^2 \left( -\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{r^2} \quad (14)$$

因此出射粒子被散射的部分在单位时间内进入到  $(\theta, \phi)$  方向单位立体角的概率为

$$dP = J_s dS = J_s r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{\mu} |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega$$

注意由微分散射截面  $\sigma_c(\theta, \phi) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$  的定义，粒子同样在单位时间内进入到  $(\theta, \phi)$  方向单位立体角的概率为

$$dP = J_{in} \sigma_c d\Omega$$

其中  $J_{in}$  为入射态概率流，注意到对于  $e^{ikz}$  有

$$J_{in} = \frac{i\hbar}{2\mu}(e^{ikz}\partial_z e^{-ikz} + c.c.) = \frac{\hbar k}{\mu}$$

立即得到

$$\sigma_c(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2$$

现在我们着手确定散射态的散射振幅  $f(\theta, \phi)$

#### 4.1 Lippmann-Schwinger 方程和 Born 近似

量子力学中的第一性原理是 Schödinger 方程，也是我们解决散射问题的根据。自由粒子散射情形

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

满足边界条件

$$\psi(\vec{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

我们采取格林函数求法尝试对方程进行试探，求取格林函数

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}_1) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$



这和电动力学一样，做 Fourier 变换，再按照惯常的因果性围道选取，得到

$$G(\vec{r} - \vec{r}_1) = -\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

于是对原方程有

$$\psi(\vec{r}) = (\nabla^2 + k^2)^{-1} \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \quad (15)$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d^3x_1 (\nabla^2 + k^2)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) V(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_1) \quad (16)$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_1) \quad (17)$$

$$(18)$$

这是一个特解。由微分方程理论，我们总可以再加一个原方程齐次方程的解以得到非齐次方程的通解，因此完整的解写为

$$\psi(\vec{r}) = \psi^0(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_1) \quad (19)$$

$$\text{where } (\nabla^2 + k^2)\psi^0(\vec{r}) = 0 \quad (20)$$

上式称为 Lippmann-Schwinger 方程，是 Schödinger 方程的积分形式。注意我们并没有解出  $\psi$  来，因为它还留在右边；但这也是价值所在，这样的方程形式允许我们多次迭代

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi^0(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_1) \\ &= \psi^0(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)\psi^0(\vec{r}_1) + \left(-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \iint d^3x_1 d^3x_2 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \frac{e^{ik|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} V(\vec{r}_1)V(\vec{r}_2)\psi^0(\vec{r}_2) \\ &\quad + \left(-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^3 \iiint d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \frac{e^{ik|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \frac{e^{ik|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|} V(\vec{r}_1)V(\vec{r}_2)V(\vec{r}_3)\psi^0(\vec{r}_3) + \dots \end{aligned}$$

我们得到了一个严格的级数解，称为 Born 级数。由于  $V(\vec{r})$  只限制在一个小邻域内，我们可以预期每一个  $V$  的乘积会贡献一个高阶小量，保留最高阶

$$\psi(\vec{r}) \approx \psi^0(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)\psi^0(\vec{r}_1) \quad (21)$$

称为 Born 近似，这样的近似在  $V$  确实是微扰时是更加合理的。在具体的散射情景中，显然齐次方程的解为自由粒子平面波解  $\psi^0(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikz}$ ，于是 Born 近似的结果是

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} V(\vec{r}_1)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} \quad (22)$$

为了得到散射振幅  $f(\theta, \phi)$  我们需要解在远处的渐进行为，由假设我们的相互作用势是  $V(\vec{r})$  具有有限力程，则当  $r \rightarrow \infty$ ，有

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \approx \frac{1}{r}, \quad e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_1|} \approx \exp[ikr(1 - \vec{r}\cdot\vec{r}_1/r^2)] \approx e^{ikr} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}_1}$$

其中  $\vec{k}_f = k\vec{r}/r$  是出射粒子的波矢量。插入 Born 近似解，有在  $r \rightarrow \infty$  下

$$\psi(\vec{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x_1 V(\vec{r}_1) e^{i(\vec{k}_f - \vec{k})\cdot\vec{r}_1} \quad (23)$$



与边界条件比较得到  $f(\theta, \phi)$  的波恩一级近似为

$$f(\theta, \phi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x_1 V(\vec{r}_1) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_1} \quad (24)$$

其中  $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}$  为动量散射前后的改变量。注意  $\vec{k}_f$  和  $\vec{k}$  模长相同且夹角正好为散射角  $\theta$ ；换句话说我们有  $q = 2k\sin(\theta/2)$ 。

对于即将要处理的 Rutherford 散射，我们可以对上式做进一步化简，考虑中心力场  $V(\vec{r}) = V(r)$ ，那么显然由于关于  $z$  轴的对称性  $f(\theta, \phi) = f(\theta)$ ；而关于散射振幅的计算我们可以选择  $\vec{q}$  的方向作为新的  $z'$  方向建立辅助球坐标系  $(\rho, \beta, \alpha)$ ，有

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_0^{+\infty} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi V(\rho) e^{-iq\rho\cos\alpha} \sin\alpha d\alpha \\ &= -\frac{\mu}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} V(\rho) \rho^2 d\rho \int_{-1}^1 e^{iq\rho s} ds = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^{+\infty} V(\rho) \sin(q\rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

其中如前所述  $q = 2k\sin(\theta/2)$  因此微分散射截面结果为

$$\sigma_c(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^{+\infty} V(\rho) \sin(q\rho) \rho d\rho \right|^2 \quad (25)$$

## 4.2 Rutherford 散射的 Born 近似计算

Coulomb 势是指

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (26)$$

其中  $\alpha > 0$  表示斥力， $\alpha < 0$  表示引力，对于两个原子核的散射， $\alpha = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$ ，对于氢原子和类氢原子核  $\alpha = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = Z\hbar\alpha c$  ( $\alpha$  为精细结构常数)。精确到波恩一阶近似：

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^\infty V(\rho) \sin(q\rho) d\rho = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \sin(q\rho) d\rho = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q^2} \int_0^\infty \sin(x) dx \quad (27)$$

但是按照高等数学积分

$$\int_0^\infty \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\infty = -1 + \cos(\infty) \text{ is divergent}$$

表面上看这似乎是在说 Coulomb 势没有散射振幅，实际上不然。回顾我们的假设，我们要求散射振幅的力程是有限的，但我们由经典理论就可以知道实际上对 Coulomb 势来说，它的力程是无限大的<sup>3</sup>，无论粒子距离靶核有多远都会被，因此有必要做一点微小的修改。考虑真实的物理散射过程中，没有完全裸露的电荷，空气或者其它的微观粒子会产生一定的屏蔽效应，考虑添加屏蔽项修改为：

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (28)$$

其中由指数衰减的常见意义我们可以把  $a$  定义为该相互作用势<sup>4</sup>的力程，取力程  $a \rightarrow \infty$  的极限我们就回到 Coulomb 势。

<sup>3</sup>其实这里的散射振幅或散射截面发散可以视为力程无限大的一个定义

<sup>4</sup>该势称为汤川势，Yukawa potential。为什么要引入这样形式的修正仅从屏蔽角度来理解大概是说起屏蔽效应的电荷分布具有  $e$  指数衰减的形式，比较合理；如果纯粹从相互作用的角度进行理解这样的修正存在更深刻的理由：指数反比于相互作用介子的质量，电磁相互作用传播子的质量为零（虚光子）才使得汤川势回到 Coulomb 势



如此，在有限力程相互作用下重新计算散射振幅，为简便我们记  $\beta \equiv \frac{1}{qa}$ ，有

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^\infty V(\rho) \sin(q\rho) d\rho = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \sin(q\rho) e^{-\beta q\rho} d\rho \\ &= -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q^2} \int_0^\infty \sin(x) e^{-\beta x} dx = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q^2} \text{Im} \int_0^\infty e^{-(\beta-i)x} dx \\ &= -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q^2} \text{Im} \left( \frac{1}{\beta-i} \right) = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 q^2} \frac{1}{\beta^2+1} \end{aligned}$$

于是 Coulomb 散射的微分散射截面是：

$$\sigma_c(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{4\mu^2\alpha^2}{\hbar^4 q^4} \frac{1}{(\beta^2+1)^2} \quad (29)$$

带入  $\beta = 1/qa$ ， $q = k\sin(\theta/2)$ ， $v = \hbar k/\mu$  入射粒子速度，化简得到：

$$\sigma_c(\theta) = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \left( \frac{a^2 \mu^2 v^2 \sin^2(\theta/2)}{\hbar^2 + a^2 \mu^2 v^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \quad (30)$$

最后取力程  $a \rightarrow \infty$  的极限得到

$$\sigma_c(\theta) = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (31)$$

正是 Rutherford 用经典理论分析得到的结果。注意  $a \rightarrow \infty$  起到的作用，Coulomb 相互作用的长程性使得公式中仅有的  $\hbar$  消失，这也昭示了为什么 Rutherford 在量子力学诞生以前就得到了正确的散射结果：因为我们经典的实验手段精确（而幸运）地避开了所有量子效应涌现的地方；而对于经典实验所及之处，麦克斯韦等前辈早就给我们准备好了一套完整的电磁理论。

### 4.3 非相对论量子力学的精确计算<sup>[2]</sup>

上面的计算过程唯一有一点缺陷便是给人感觉过于巧合。我们很难将具有长程作用的 Coulomb 势视为一种微扰，因而 Born 近似仅在一阶就给出了准确的散射结果不免使人感到惊讶。实际上我们将看到如果用精确的解来得到散射振幅与使用 Born 近似得到的散射振幅仅仅只差一个相因子。这是 Coulomb 势高度非平凡的特点。

我们依旧将 Coulomb 势写成

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (32)$$

意义与之前相同。我们要求解的定态 Schödinger 方程是

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{\alpha}{r} \right) \psi_E(\vec{x}) = E \psi_E(\vec{x}) \quad (33)$$

我们关心的是散射态，因而能量为  $E = \frac{\hbar^2 k_E^2}{2\mu}$ ，改写方程为

$$\left( \nabla^2 + k_E^2 - \frac{2\gamma_E k_E}{r} \right) \psi(\vec{x}) = 0 \quad (34)$$

式中  $\gamma_E = \mu\alpha/(\hbar^2 k_E)$  为依赖  $E$  的无量纲常数。



我们记入射粒子波矢量为  $\vec{k}$ ，和前文一样， $\vec{k} = k_E \hat{e}_z$ ， $\hat{e}_z$  为水平  $z$  轴方向的单位基矢。由微分方程的结果，相应的散射定态解为

$$\psi_E(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-\pi\gamma_E/2} \Gamma(1+i\gamma_E) {}_1F_1(-i\gamma_E; 1; i(k_E r - \vec{k}\cdot\vec{x})) \quad (35)$$

其中  ${}_1F_1(a; b; w)$  是合流超几何函数，可以定义为如下级数：

$${}_1F_1(a; b; w) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a)_n w^n}{(b)_n n!} \quad (36)$$

式中  $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ ，叫做 Pochhammer 符号。当然由于  $\vec{k}$  沿着  $z$  轴，实际上式中的  $\vec{k}\cdot\vec{x} = k_E z$ ， $k_E r - \vec{k}\cdot\vec{x} = k_E(r-z)$ 。我们直接给出了这个结果，但得到这个结果的过程明显这里是放不下的，可以参考朗道《量子力学》第十七章第 135 节相关的推导。

下面我们来考察这个解 35 在  $r \rightarrow +\infty$  的渐进行为，用到的是合流超几何函数  ${}_1F_1(a; b; w)$  在  $|w| \rightarrow \infty$  的渐近展开，

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; b; w) &= e^{i\pi a} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} w^{-a} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (a)_n (a-b+1)_n}{n!} w^{-n} \right) \\ &+ e^w w^{a-b} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b-a)_n (1-a)_n}{n!} w^{-n} \right) + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

由此我们可以得到散射定态解 35 在  $r-z \rightarrow +\infty$  的渐进形式。注意，这里我们关心的是被散射的出射粒子方向，而不是未经散射的沿原来入射方向的出射的粒子态，因而当  $r \rightarrow +\infty$  时有  $r-z \rightarrow +\infty$ ：

$$\begin{aligned} \psi_E(\vec{x}) &\sim e^{ik_E z} [k_E(r-z)]^{i\gamma_E} - \frac{\gamma_E}{k_E(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\gamma_E)}{\Gamma(1-i\gamma_E)} e^{ik_E r} [k_E(r-z)]^{-i\gamma_E} + \dots \\ &= e^{ik_E z + i\gamma_E \ln(k_E(r-z))} - \frac{\gamma_E}{k_E(r-z)} \frac{\Gamma(1+i\gamma_E)}{\Gamma(1-i\gamma_E)} e^{ik_E r - i\gamma_E \ln(k_E(r-z))} + \dots \\ &= e^{ik_E z + i\gamma_E \ln(k_E(r-z))} + f(\theta) \frac{e^{ik_E r - i\gamma_E \ln(k_E(r-z))}}{r} + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

式中

$$f(\theta) = -\frac{\gamma_E \Gamma(1+i\gamma_E)}{k_E \Gamma(1-i\gamma_E)} \frac{r}{r-z} = -\frac{\gamma_E \Gamma(1+i\gamma_E)}{2k_E \Gamma(1-i\gamma_E)} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (39)$$

式中  $\theta$  是  $\vec{x}$  和水平  $z$  轴的夹角，也就是散射角。

仅从 38 来看，精确解的渐进行为并不完全是我们预先设想

$$\psi(\vec{x}) \Big|_{r \rightarrow \infty} \approx e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

的形式，在不同的角度上多出来了些相因子。这并没有本质性的影响<sup>5</sup>，我们只需调整整体的相位，并注意到散射带来的大小  $-2\gamma_E \ln(k_E(r-z))$  的相移<sup>6</sup>。

于是现在我们就得到了精确的微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\alpha^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (40)$$

<sup>5</sup>不过值得注意的是散射过程对入射态的波函数是有一个影响的，不过这并不令人感到意外，因为我们在量子力学里对物理态的理解是整体性的，不会有所谓“入射态粒子在进入相互作用力程内之前并不会感受到相互作用”这种事情

<sup>6</sup>这其实可以吸收到  $f(\theta)$  里去，但我们选择将其放在外面



其中我们代入了  $\gamma_E = \mu\alpha/\hbar^2 k_E$  和  $E = \hbar^2 k_E^2/2\mu$ ，同样得到了 Rutherford 公式。

如前所述，注意我们这里与 Born 近似的区别，我们在这里没有做任何近似，是直接通过解定态 Schödinger 方程得到精确解，但  $f(\theta)$  只与 Born 近似差了一个相位

$$e^{i\delta(E)} = \frac{\Gamma(1 + i\gamma_E)}{\Gamma(1 - i\gamma_E)} \quad (41)$$

这个相位对散射截面没有贡献，但是，我们对精确解的求取不是白做的。这个相位包含了很重要的信息，比方说 Coulomb 势束缚态解的能谱。详细参见陈童老师的讲义和 Sakurai 上散射相关的章节。

## 5 量子场论散射<sup>[3, 4, 5]</sup>

如无特殊声明，我们在以下部分都取度规为粒子物理学度规： $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ，并取自然单位制  $\hbar = c = 1$ 。

### 5.1 量子电动力学简介

量子场论可以被认为是狭义相对论与量子场论结合；作为一种有效理论，我们同样常常通过微扰展开的方法来计算具体的散射振幅。只不过，对于散射过程，我们常常使用费曼图 (Feynman Diagram) 这一工具来帮助计算。Rutherford 散射可以描述原子核和  $\alpha$  粒子的散射。其中，原子核的电磁场作为外场，认为是电磁场；而正电子或  $\alpha$  粒子可以认为是费米子。因此，量子电动力学 (Quantum ElectroDynamics, QED) 就是量子场论框架下最好的用来描述 Rutherford 散射的理论。为此，我们先简单介绍 QED 费曼图的规则<sup>7</sup>：

$$\begin{aligned}
 & \text{Vertex: } \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} = -iZe\gamma^\mu \\
 & \text{Photon propagator: } \text{---} \text{---} \text{---} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \\
 & \text{Incoming fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = \epsilon_\mu(p) \quad \text{Outgoing fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = \bar{v}^s(k) \quad \text{Incoming fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = v^s(k) \\
 & \text{Outgoing fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = \epsilon_\mu^*(p) \quad \text{Incoming fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = v^s(k) \quad \text{Outgoing fermion: } \text{---} \text{---} \text{---} = \bar{u}^s(k)
 \end{aligned}$$

这是 QED 的费曼规则，即：我们按电荷流动的方向读图，每当遇到一个相互作用顶点，则乘一个  $-iZe\gamma^\mu$  的因子；每遇到一个内线光子传播子，乘一个  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$  的因子；而外线的光子传播子、费米子传播子都会有一个贡献（特别地，当我们不考虑费米子的自旋相互作用时，我们可以把旋量  $u, v$  的上指标略去）。费曼图的正确性证明我们在此略去，参看任何一本经典的量子场论教材都可以找到。

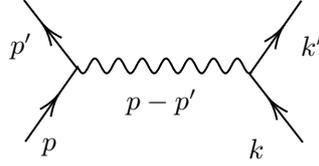
值得注意的是，尽管这个理论被称为量子电动力学，但他和经典电动力学之间并不存在显式的依赖关系：我们在推导场量子化及其传播子的时候，没有假定任何具体的相互作用形式（比如，Yukawa 势、Coulomb 势等），所以我们必须要先使用量子电动力学给出 Coulomb 势的表达式。

<sup>7</sup>由于篇幅所限，本节中省略了大量的计算细节。这些细节中的一部分会在附录中给出，而更好的建议是自行学习量子场论——毕竟我们不可能只通过一篇十页的小论文让大家学会一门一学期 4 学分的课程



## 5.2 低能极限下的 Coulomb 势

为了计算出 Coulomb 势，我们计算一个最简单的树阶电子-电子相互作用的费曼图。这个图绘制如下：



按照上面所提到的费曼规则，我们可以写出这张图所代表的费曼振幅如下：

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p-p')^2 + i\epsilon} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \quad (42)$$

在低能极限下，4-动量  $p, p', k, k' \approx 0$ ，在这种情况下，可以验算出： $\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) = 2m$ 。利用这个性质，我们可以将费曼振幅中的指标缩并简化：

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{4im^2}{(p-p')^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{4ie^2m^2}{|\vec{p}-\vec{p}'|^2} \end{aligned} \quad (43)$$

这其中  $i\epsilon$  被自动省略，因为我们可以证明对任意树阶图的散射振幅都不会出现表观发散，所以这个  $i\epsilon$  的因子都是可去的。

而 S 矩阵理论告诉我们：

$$\langle p' | iT | p \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') i\mathcal{M}$$

在进行一次 Fourier 变换（仅对三个空间分量这么做）后，我们可以得到：

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2} \quad (44)$$

其中  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$  我们直接丢掉了由两个旋量带来的  $4m^2$  因子，因为在相对论情形下的旋量近似到非相对论情形时是没有归一化的。重新归一化将使这两个因子失去。

对这个动量空间的势能作 Fourier 变换：

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{-e^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d|p| \int_0^\pi d\theta e^{i|p||x| \cos \theta} \sin \theta \\ &= \frac{-e^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{e^{i|p||x|} - e^{-i|p||x|}}{|p||x|} \\ &= \frac{e^2}{4\pi|x|^2} \end{aligned} \quad (45)$$

由上，我们从量子电动力学的费曼规则出发，得到了 Coulomb 势的表达式。现在，我们就继续进行散射截面的计算。



### 5.3 箱归一化与散射截面

我们现在在量子场论框架下考虑散射问题。根据散射区域  $\sigma = \pi r^2$  的定义，我们可以给出：

$$d\sigma = \frac{1}{T} \frac{1}{\rho |\vec{v}|} dP$$

其中， $T$  是实验的时间长度， $\rho$  是入射粒子束的数密度，而  $v$  是入射粒子束的速度。 $P$  则是量子的散射概率。

现在来考察一个 2-2 散射过程  $p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2$ ，我们选取一个特定的入射粒子在它的静止参考系来考察：它的数密度就是  $\frac{1}{V}$ ，而速度即为它和靶粒子的相对速度  $|\vec{v}|$ 。但如果我们选取的不是入射粒子的静止系，而是一个普通的参考系，那么这个速度就应当表为两粒子的速度之差：

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP$$

所谓箱归一化技术，就是我们取散射过程所涉及的空间体积  $V$  为一个长度为  $L$  的正方体箱。自然地，一个理想散射过程要对  $L: -\infty \sim \infty$  积分。并且，我们将  $L$  分为  $N$  个完全相同的段，于是空间的坐标被离散化： $x_i = \frac{i}{N}L$ ，对应离散的动量模式： $p_i = \frac{2\pi i}{NL}$  而在箱归一化之后，我们可以认为如下归一化条件成立：

$$\int \frac{dp}{2\pi} = \frac{1}{L} \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

这允许我们很方便地在相空间（动量空间）中考虑散射问题。根据量子力学中  $S$  矩阵的定义，我们知道：

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} \frac{V^2}{(2\pi)^6} dq_1^3 dq_2^3 \tag{48}$$

红色部分是归一化因子（可以验证归一化因子本身在全空间积分为 1）。

另外，我们由归一化条件可以给出  $\delta$  函数在箱归一化下的改写：

$$\delta^{(3)}(0) = \int dx^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{49}$$

$$\delta^t(0) = \int d\theta = \frac{T}{(2\pi)} \tag{50}$$

$$\Rightarrow \delta^{(4)}(0) = \frac{VT}{(2\pi)^4} \tag{51}$$

利用这个改写，再计及场的正则量子化条件，我们可以给出<sup>8</sup>：

$$\langle i|i\rangle = (2E_1V)(2E_2V) \tag{52}$$

$$\langle f|f\rangle = (2E'_1V)(2E'_2V) \tag{53}$$

$$\langle f|i\rangle = 0 \tag{54}$$

现在还剩一个  $\langle f|S|i\rangle$  需要计算。对此，我们利用微扰论的精神，将  $S$  矩阵展开为：

$$S = 1 + iT = 1 + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 + q_2) i\mathcal{M}$$

<sup>8</sup>通常教科书在此处给出的都是以标量场为例。尽管标量场和旋量场的理论有差异，我们仍然可以检验旋量场量子化也满足以下的条件



这时候，我们只需要注意到， $\delta$  函数在做平方时，我们倒着利用  $f(y)\delta(x) = f(x)\delta(x)$ ，就可以只保留一组  $\delta^{(4)}$  函数，而另一组的宗量任取。为了利用箱归一化条件，我们直接取为 0。所以我们可以直接计算对应的模方：

$$\begin{aligned} |\langle f|S|i\rangle|^2 &= \delta^4(0)\delta^4(\Sigma p)(2\pi)^8 |\langle f|\mathcal{M}|i\rangle|^2 \\ &= \delta^4(\Sigma p)TV(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (55)$$

综合以上各式，我们就可以给出  $d\sigma$  的表达式：

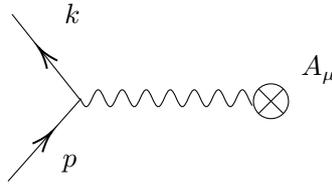
$$d\sigma = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{dq_1^3 dq_2^3}{(2\pi)^6} \frac{1}{(2E'_1)(2E'_2)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) |\mathcal{M}|^2 \quad (56)$$

## 5.4 Rutherford 散射

现在我们就来计算 Rutherford 散射。根据著名的 Born-Oppenheimer 近似，原子核  $Ze$  的质量要比被散射粒子 ( $ze$ ，认为是一个带正电荷的费米子) 大得多，因而我们几乎可以认为核是固定的，进而可以将核视作一个恒定场源，以一个矢量场  $A^\mu(x)$  来描述它。具体地，我们注意到  $A^\mu$  的电动力学解释，就有：

$$\tilde{A}^0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}, \quad \tilde{A}^i(\vec{q}) = 0$$

这个散射过程可以看作一个 1-1 散射，作出其费曼图<sup>9</sup>：



这张图的振幅只由两个外线费米传播子和一个相互作用顶点组成，我们可以直接写出其散射振幅：

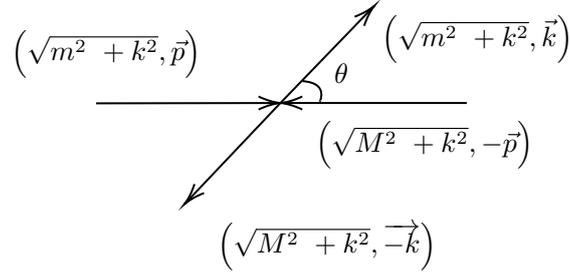
$$i\mathcal{M} = ize\bar{u}(k)\gamma^\mu \tilde{A}_\mu(\vec{q})u(p) \quad (57)$$

在实际的散射过程中，我们对发射出的电子不区分其自旋的正负，因此不同自旋的电子可以认为各占一半，且独立地进行散射。我们取：

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{M}_{spin}|^2 \\ &= \frac{1}{2} z^2 e^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \sum_{r,s} \bar{u}^r(p) \gamma^\mu u^r(k) \bar{u}^s(k) \gamma^\nu u^s(p) \\ &= \frac{1}{2} z^2 e^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k} + m)] \\ &= 2z^2 e^2 [2(p \cdot \tilde{A})(k \cdot \tilde{A}) + (m^2 - (p \cdot k))\tilde{A}^2] \end{aligned}$$

现在我们在质心系中考虑散射。首先，我们注意到质心系中，两粒子的动量有如下关系：

<sup>9</sup>为什么这里使用的是电子的费曼图记号？因为我们只要考虑带有相同电性的相互作用，即只要有排斥作用即可。至于正电排斥还是负电排斥，无关紧要。我们在 QED 中常有这样的处理



在极端相对论情形下，我们有理由认为  $m \sim 0, M \sim 0$ 。在此种近似下，近似有  $|\vec{p}| \sim |\vec{k}|$  这就给出：

$$\tilde{A}^0(\vec{q}) = \frac{Ze}{4|\vec{k}|^2 \sin^2(\theta/2)} \quad (58)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{z^2 Z^2 e^4 (1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})}{4|\vec{k}|^2 v^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (59)$$

最后，我们要从散射振幅计算出散射截面：我们要将 2-2 散射修正为 1-1 散射，只需考虑<sup>10</sup>：

$$\begin{aligned} dP &\rightarrow \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} \frac{V}{(2\pi)^3} dq^3 \\ \langle i|i\rangle &\rightarrow (2EV) \\ \langle f|f\rangle &\rightarrow (2E'V) \\ \langle f|i\rangle &\rightarrow 0 \\ |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| &\rightarrow |\vec{v}| = v \\ \Rightarrow d\sigma &\rightarrow \frac{1}{(2E)v} \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2E')} (2\pi) \delta(E - E') |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

下面我们来处理这个积分。我们作  $dk^3 = |k|^2 dk d\Omega$  的球坐标换元，于是就可以给出散射截面的表达式：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int \frac{dk |k|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{v} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 (2\pi) \delta(E_p - E_k) \\ &= \int \frac{|k| E_k dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{v} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 (2\pi) \delta(E_p - E_k) \\ &= \frac{\sqrt{E_p^2 - m^2} E_p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{v} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 (2\pi) \\ &= \frac{p}{16\pi^2 (E_p v)} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 \\ &= \frac{\gamma m v}{16\pi^2 (\gamma m v)} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} |\mathcal{M}(p \rightarrow k)|^2 \end{aligned}$$

这里，我们运用了  $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ ，且  $E = \gamma m, p = \gamma m v$ 。于是我们就可以将上面计算出的振幅带入：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2 (1 - v^2 \sin^2(\theta/2))}{4|\vec{p}|^2 v^2 \sin^4(\theta/2)}$$

<sup>10</sup>  $d\sigma$  的表达式中，因为我们不把矢量场  $A^\mu$  的光子作为一个入射/出射粒子，所以直接可以把动量守恒的  $\delta^{(3)}$  给积掉。实际上，计算散射振幅时总会积掉所有的积分，所以后面的过程中我们将所有的微分都做积分处理。



利用量纲分析回到标准单位制，得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_R} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2 c^2 \hbar^2}{4|\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)}{\beta^2} \quad (60)$$

$$= \frac{z^2 Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)}{\beta^2} \quad (61)$$

其中， $\beta = v/c$  是入射粒子的相对论因子， $|\vec{p}| = \gamma m v$  为入射粒子的初态动量。

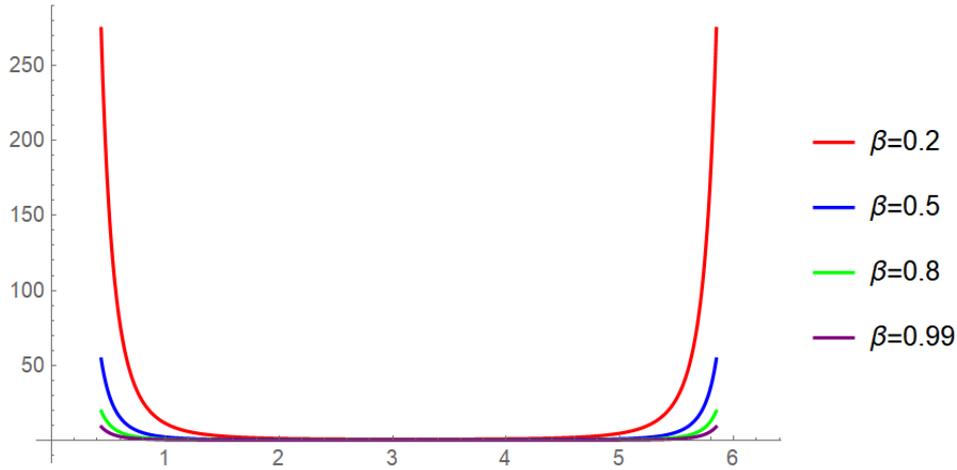


图 5.1: 相对论性 Rutherford 散射截面

可以看出，不同的  $\beta$  并不改变定性上的粒子分布；仅仅是当  $\beta$  较大时，粒子在大角度的分布会更少。如果取  $\beta \rightarrow 0$  的极限，就得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 z^2 Z^2 c^2 \hbar^2}{4m^2 v_0^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (62)$$

这就是非相对论情形下的 Rutherford 散射。至此，我们完整地给出了 QED 框架下的 Rutherford 散射公式及其场论修正（狭义相对论 + 量子效应修正）。

## 6 不同方法的对比

### 6.1 为什么使用经典力学？

一个最简单的看法是，经典力学的方法最简单：我们甚至不用非常关心矢量，可以直接在一个平面中按标量分量展开，对初学者来说是非常友好的。另外，在入射粒子的速度不很大的情况下，量子力学和场论已经验证过经典力学解法的正确性，所以可以放心使用。

### 6.2 量子力学改变了什么？

常见的量子力学算法有两种，一种是利用 Born 近似将波函数展开；另一种是利用合流超几何函数的渐进行为，直接精确计算。Born 近似给出的结果与经典力学相同，其计算也并不复杂。但仔细考察 Born 近似的过程就会发现，量子参数  $\hbar$  被消除的过程，实际上是汤川（Yukawa）势： $V = V_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$  在  $a \rightarrow 0$  时才能够进行的。



换句话说，Rutherford 散射成立强烈地依赖于 Coulomb 势的形式。在 Yukawa 势下，量子力学计算才能给出正确的结果。

而利用合流超几何函数作渐近展开的解法非常复杂，但其自有其好处：这套解法脱离了 Born 近似和微扰论框架，是在量子力学框架下的最好的精确求解方法。值得注意的是，这种方法给出的结果中有一个对散射截面没有贡献的相位因子，这个相位因子的物理意义是在解析延拓的复平面上给出散射问题下所有束缚态的能级（以不可解析极点形式），因此在分析散射问题的束缚态和散射态时非常重要——当然，Rutherford 散射的排斥势能决定了其不可能有束缚态形式。

### 6.3 量子场论改变了什么？

量子场论做了两件事：第一，它达成了最接近真实的物理分析；第二，它兼容了狭义相对论（并确实给出了狭义相对论修正）

物理分析方面：我们在经典力学和量子力学分析时，甚至完全没有去管原子核和散射的电子（ $\alpha$  粒子）——他们只是带电荷带质量的“粒子”。量子场论首先指出：我们应该用旋量场来描述入射的粒子（费米子），用矢量场来描述靶粒子的场（电磁场）。从这里来看，量子场论理论无疑是最接近真实物理的。（当然，一个最美好的想法是我们把核拆分成中子、质子，然后考虑其中的夸克和入射费米子的散射——但是这需要 QCD 修正，这项工程太过于繁琐和困难，所以我们没有采用）。

另外，当电子速度很大时，狭义相对论效应将不能忽略；对于这种情况，直接采用经典力学方法来计算无疑是非常繁琐的，因为相对论的动量定理和角动量定理都很复杂；另外，对于有量子效应修正的情况，普通的量子力学方法不能兼顾狭义相对论。因而，量子场论（特别是量子电动力学）是描述狭义相对论下量子物理现象的最好方法。

## 7 致谢

感谢查王妹老师对我们的指导，他在课堂上的精彩讲解和启发引起了我们进一步的思考，并最终有了这样一篇小论文。感谢 20 级物理学院的林书睿同学和杨晨同学，他们对我们论文中一些不太严谨的过程予以了指导和完善方面的帮助。

## 参考文献

- [1] 陈童. 量子力学新讲. 2021.
- [2] Jun John Sakurai, San Fu Tuan, and Roger G. Newton. Modern quantum mechanics. *Physics Today*, 1986.
- [3] G. G. Chen, D. Derbes, D. Griffiths, B. Hill, and Y. S. Ting. *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser*. Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory: Foreword by David Kaiser, 2018.
- [4] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model, 2013.
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. An introduction to quantum field theory. *Phys. Today*, 1996.