切变模量测量

姓名：刘元彻　　学号：PB21020505　　班级：21 级物理学院 1 班　　日期：2022 年 4 月 17 日

1　实验目的

用扭摆来测量金属丝的切变模量，同时要学习尽量设法避免测量那些较难测准的物理量，从而提高实验精度的设计思想。

2　实验原理

实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝，从几何上说可以等效为一细长的圆柱体，其半径为 R，长度为 L。将其上端固定，而使其下端面发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面小体积元均发生切应变。

在弹性限度内，且切应变 $\gamma = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \ll 1$ 时，可将扭摆的转动类比于小振动，于是可以通过测量扭摆转动的周期，间接计算出钢丝的切变模量：

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 \tag{1}$$

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4} \tag{2}$$

其中，T_0 是扭摆不悬挂其他物体时的转动周期，I_0 是扭摆对其悬挂点的转动惯量；但是因为扭摆的固定方式导致其转动惯量难以被测出，因此可将一个金属环对称地置于圆盘上。

设这个金属环具有质量 m，内半径 $r_{内}$ 和外半径 $r_{外}$，置于圆盘上后可得到转动周期 T_1，利用比值法，可将上面的公式改写为：

$$D = \frac{2\pi^2 m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{T_1^2 - T_0^2} \tag{3}$$

$$G = \frac{4\pi L m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \tag{4}$$

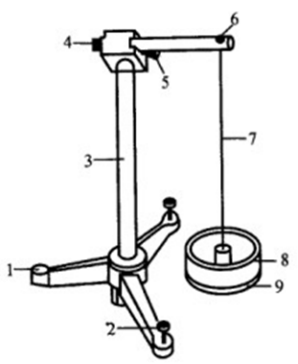

图 1: 实验装置示意图

3 实验器材

待测钢丝，扭摆及悬挂装置（其中待测钢丝下已经悬挂了圆盘），已知质量的金属环，卷尺（最小分度值 1mm），游标卡尺（最小分度值 0.02mm），螺旋测微器（最小分度值 0.01mm），电子秒表

4 实验步骤

- 装置扭摆，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直，圆环应能方便地置于圆盘上。
- 用螺旋测微器测钢丝直径，用游标卡尺测环的内外径，用米尺测钢丝的有效长度。
- 写出相对误差公式，据此估算应测多少个周期较合适。
- 计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D，分析误差。

5 实验数据

5.1 长度测量

卷尺测量钢丝长度的允差 $\Delta_B L = 0.5\text{mm}$，游标卡尺测量圆环时，直径的允差 $\Delta_B d = 0.02\text{mm}$，于是半径的允差 $\Delta_B r = 0.01\text{mm}$，螺旋测微器测量钢丝直径的误差为 $\Delta_B R = 0.005\text{mm}$

注意到钢丝长度带来的误差非常小，因此只进行一次测量；其他长度物理量均进行多次测量（其中，钢丝直径 R 测量 5 次，圆环内外径分别测量 3 次）

实验测得钢丝长度：$L = 46.50\text{cm}$

测量钢丝直径和圆环内外径的数据如下：

表 1: 钢丝直径测量

次数	$d_{测}$(mm)	$d_{空}$(mm)	d(mm)
1	0.820	0.045	0.775
2	0.820	0.042	0.778
3	0.818	0.040	0.778
4	0.820	0.043	0.777
5	0.821	0.044	0.777

于是处理得到 $\bar{d} = 0.777\text{mm}$，于是 $\bar{R} = 0.3885\text{mm}$（暂时保留多一位有效数字）

表 2: 圆环内外径测量

次数	$d_{内}$(mm)	$d_{外}$(mm)
1	100.00	78.90
2	100.06	78.94
3	100.04	78.92

于是处理得到平均值作为测量值：$r_{内} = 39.46\text{mm}, r_{外} = 50.02\text{mm}$

5.2 质量测量

本实验中，实验室给定了金属圆环的质量 $m = 494.8\text{g}$。由于实验室测量金属圆环的方法、工具皆未知，测量次数未知，因此圆环的质量视为已知量处理，无需分析不确定度。

5.3 测量周期数的确定

根据相对误差公式，可以给出：

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{4\Delta R}{R} + \frac{2r_{内}\Delta r_{内} + 2r_{外}\Delta r_{外}}{r_{内}^2 + r_{外}^2} + \frac{2T_0\Delta T_0 + 2T_1\Delta T_1}{T_1^2 - T_0^2}$$

其中，根据前面的数据进行估计，可以发现主要误差为 $4\Delta R/R$ 项。而与周期有关的项不可直接求出，但是应当要求两者各自的误差小于主要误差的 $1/5$。

于是得到两个不等式：

$$\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2 - T_0^2} < \frac{1}{5}\frac{4\Delta R}{R} \tag{5}$$

$$\frac{2T_0\Delta T_0}{T_1^2 - T_0^2} < \frac{1}{5}\frac{4\Delta R}{R} \tag{6}$$

对扭摆周期进行估测，并考虑到人使用秒表计时时的误差为 $\Delta T = 0.2\text{s}$，可解出大约需要 40 个周期。所以接下来本实验中每次测量均使扭摆摆动 40 个完整周期。

5.4 周期测量

表 3: 未放置金属圆环测量 T_0

次数	摆角 90°(s)	摆角 180°(s)
1	93.06	93.32
2	93.04	93.27
3	93.07	93.30
4	93.06	93.29

表 4: 放置金属圆环测量 T_1

次数	摆角 90°(s)	摆角 180°(s)
1	145.75	145.89
2	145.56	145.97
3	145.51	145.94
4	145.50	145.85

6 数据处理与误差分析

以下误差分析在 $P = 0.95$ 下进行：

6.1 摆角为 90°

首先计算出周期的平均值：

$$\bar{T_0} = \frac{1}{40 \times 4} \times (93.06 + 93.04 + 93.07 + 93.06)\text{s} = 2.326\text{s}$$

$$\bar{T_1} = \frac{1}{40 \times 4} \times (145.75 + 145.56 + 145.51 + 145.50)\text{s} = 3.640\text{s}$$

于是代入计算出切变模量

$$\bar{G} = \frac{4\pi L m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} = 6.572 \times 10^{10}\text{Pa}$$

长度 L 的不确定度只需要考虑 B 类不确定度：$\Delta_L = \Delta_B L = 0.05\text{cm}$，于是有

$$U_L = k_P \frac{\Delta L}{C} = 0.033\text{cm}$$

R 的测量中，首先计算五次测量的标准差：

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_k/2 - \bar{R})^2}{n-1}} = 0.0006\text{mm}$$

游标卡尺测量的误差为 $\Delta_R = 0.02\text{mm}$，利用不确定度的合成公式：

$$U_R = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_R}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_R}{C})^2} = 0.003\text{mm}$$

$r_{内}$ 和 $r_{外}$ 的操作与上面类似：$\Delta_r = 0.01\text{mm}$，计算出标准差：

$$\sigma_{内} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_k/2 - \bar{r_{内}})^2}{n-1}} = 0.016\text{mm}$$

$$\sigma_{外} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_k/2 - \bar{r_{外}})^2}{n-1}} = 0.010\text{mm}$$

于是利用不确定度合成公式：

$$U_{内} = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_{内}}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_{内}}{C})^2} = 0.041\text{mm}$$

$$U_{外} = \sqrt{(t_P \frac{\sigma_{外}}{\sqrt{n}})^2 + (k_P \frac{\Delta_{外}}{C})^2} = 0.026\text{mm}$$

对于周期测量，对一个周期的测量误差 $\Delta T = \sqrt{\Delta_{表}^2 + \Delta_{人}^2} = 0.005\text{s}$
周期测量的标准差分别是：

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(T_{0k} - \bar{T_0})^2}{n-1}} = 0.0006\text{s}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(T_{1k}-\bar{T}_1)^2}{n-1}} = 0.0030\text{s}$$

于是可以得到周期测量的不确定度:

$$U_0 = \sqrt{(t_P\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})^2 + (k_P\frac{\Delta_0}{C})^2} = 0.0034\text{s}$$

$$U_1 = \sqrt{(t_P\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}})^2 + (k_P\frac{\Delta_1}{C})^2} = 0.0058\text{s}$$

根据误差分析公式，得到切变模量的不确定度为:

$$U_G = \bar{G}\sqrt{(\frac{U_L}{L})^2 + (\frac{4U_R}{R})^2 + (\frac{2r_{内}U_{内}}{r_{内}^2+r_{外}^2})^2 + (\frac{2r_{外}U_{外}}{r_{内}^2+r_{外}^2})^2 + (\frac{2T_0U_0}{T_1^2-T_0^2})^2 + (\frac{2T_1U_1}{T_1^2-T_0^2})^2} = 2.07\times10^9\text{Pa}$$

最终的结果应该表示为 $G = \bar{G}\pm U_G = (6.572\pm0.207)\times10^{10}\text{Pa}, P = 0.95$

相对不确定度 $\eta \approx 3.1\% < 5\%$，满足实验要求

6.2 摆角为 180°

在这个例子中，只需要重新计算和周期有关的数据即可:

首先计算出周期的平均值:

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{40\times4}\times(93.32+93.27+93.30+93.29)\text{s} = 2.332\text{s}$$

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{40\times4}\times(145.75+145.56+145.51+145.50)\text{s} = 3.648\text{s}$$

于是代入计算出切变模量

$$\bar{G} = \frac{4\pi Lm(r_{内}^2+r_{外}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)} = 6.546\times10^{10}\text{Pa}$$

周期测量的标准差分别是:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(T_{0k}-\bar{T}_0)^2}{n-1}} = 0.0007\text{s}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(T_{1k}-\bar{T}_1)^2}{n-1}} = 0.0013\text{s}$$

于是可以得到周期测量的不确定度:

$$U_0 = \sqrt{(t_P\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})^2 + (k_P\frac{\Delta_0}{C})^2} = 0.0034\text{s}$$

$$U_1 = \sqrt{(t_P\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}})^2 + (k_P\frac{\Delta_1}{C})^2} = 0.0039\text{s}$$

根据误差分析公式，得到切变模量的不确定度为：

$$U_G = \bar{G}\sqrt{(\frac{U_L}{L})^2 + (\frac{4U_R}{R})^2 + (\frac{2r_{内}U_{内}}{r_{内}^2 + r_{外}^2})^2 + (\frac{2r_{外}U_{外}}{r_{内}^2 + r_{外}^2})^2 + (\frac{2T_0U_0}{T_1^2 - T_0^2})^2 + (\frac{2T_1U_1}{T_1^2 - T_0^2})^2} = 2.04 \times 10^9\mathrm{Pa}$$

最终的结果应该表示为 $G = \bar{G} \pm U_G = (6.546 \pm 0.204) \times 10^{10}\mathrm{Pa}, P = 0.95$

相对不确定度 $\eta \approx 3.1\% < 5\%$，满足实验要求

7 讨论和思考题

7.1 讨论

从以上实验可以看出，随着摆角增大，测得的切变模量会减小。当然，本实验测试的数据组数过少，不能表示普遍的规律；

同时，在实验中，我们注意到在初始摆角为 170° 时，转动到 40 个周期时摆角摆幅已经有明显变化（目测大约仅有 120°），而摆角为 90° 时摆幅的变化较小。所以，可以认为在摆角大于 180° 进行实验的意义不大。

7.2 思考题

7.2.1 小幅摆动条件

以 $\varphi = 180°$ 时的实验为例，此时最大切应变 $\gamma_{max} = R\frac{\varphi}{L} \approx 0.003 \ll 1$，所以小幅摆动的条件是成立的。

7.2.2 提高测量精度的手段

- 采用游标卡尺和螺旋测微器对长度进行精密测量；
- 利用测定 40 个周期的方法，减少时间测量时的误差对周期测定的影响，提高精度；
- 实验时控制切应变的大小，使得实验范围内始终满足近似关系，减小摆动的修正项对测定切变模量的影响；
- 关键物理量（与主要误差有关的物理量）进行多次测量，减小实验误差。