电磁学期中复习

刘元彻
中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

2022 年 11 月 10 日

目录

1 前言 2

2 静电学 3
2.1 两个静止电荷之间的相互作用力：Columb 定律 . . . 3
2.2 利用边界条件刻画区域内部的电荷性质：Gauss 定理 . . . 3
2.3 电场是保守场：Ampere 环路定理 . . . 3
2.4 二级结论 . . . 4

3 电介质 5
3.1 重要概念 . . . 5
3.2 电场强度、极化强度、电位移矢量之间的关系 . . . 5
3.3 边界和特殊线重合的情况 . . . 6

4 静电场的能量问题 6
4.1 点电荷体系相互作用能的几种表述 . . . 6
4.2 自能 . . . 7
4.3 能量密度及其物理意义 . . . 8
4.4 虚功原理 . . . 8

5 电像法 8
5.1 猜测的艺术——电像法是什么 . . . 8
5.2 两个经典的例子 . . . 9
5.3 电像法的注意事项 . . . 9

6 稳恒电流 10
6.1 稳恒条件和微观定律 . . . 10
6.2 稳恒电路 . . . 10
6.3 电场问题综合求解 . . . 11

1 前言

考试内容：静电学、电介质、静电学的能量问题、稳恒电流（电路分析）

参考教材：《电磁学与电动力学（上册）》胡友秋，程福臻，叶邦角，刘之景

由于是个人复习使用的内容整理，故不会事无巨细地阐述。但考虑到这份讲义被用作电磁学 B 等课程的考前习题课（赛博天台[1]专属 ver），所以在 2022 年进行更新时加入了一些更详细的描述。

希望这个文档能为正在准备考试的你提供有力的帮助。作者是使用 LaTeX 的萌新，可能在排版上存在一些问题（甚至于有大病），希望得到您的谅解，也欢迎您与我联系，和我交流。

个人主页：http://home.ustc.edu.cn/~liuyuanche，欢迎访问，在这里你也可以找到本文档的最新版和其他（或许）有用的内容。

[1]一个神秘的组织

2 静电学

2.1 两个静止电荷之间的相互作用力：Columb 定律

定理 2.1.1 (Columb 定律)**.** 两个静止电荷，带电量是 q_1, q_2，相对位矢是 $\vec{r}$，则他们的相互作用力为：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

严格来说，Columb 定律的应用条件是两个电荷均静止；但在实际运用中常常将 Columb 定律视为超距作用的表达式，并忽视运动电荷产生电流引发的磁效应作用，因此 Columb 定律也常常用来计算运动电荷的受力。

再给出一个常用的推论：

推论 2.1.2 (电偶极子)**.** 两个带异号电量 $\pm q$ 的点电荷，距离为 l，在远场处可视作一个电偶极子，$\vec{p} = q\vec{l}$ 被称为电偶极矩。其在远场（$r >> l$）处的电势表达式为：

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

在极坐标下对这个式子求梯度就得到了电场强度的表达式：

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$$

2.2 利用边界条件刻画区域内部的电荷性质：Gauss 定理

定理 2.2.1 (Gauss 定理)**.** 对 $\mathbb{R}^3$ 中的闭合区域 D，其边界记为 ∂D，标量场 $\rho(\vec{r})$ 是电荷密度分布，矢量场 $\vec{E}(\vec{r})$ 是电场强度分布。他们满足如下积分关系：

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_D \rho \mathrm{d}V = \oint_{\partial D} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

和如下微分关系：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

上面两式分别称为积分形式和微分形式的 *Gauss* 定理。

微分形式用来刻画局部的电场强度和电荷密度的关系，积分形式通常是构造高斯面来计算对称性较强的体系的电场分布；

2.3 电场是保守场：Ampere 环路定理

定理 2.3.1 (Ampere 环路定理)**.** 对 $\mathbb{R}^3$ 中的任一闭合路径 L[2]，矢量场 $\vec{E}(\vec{r})$ 是电场强度分布，则满足如下积分关系：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

和如下微分关系：

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

上面两式分别称为积分形式和微分形式的 *Ampere* 定理，也叫 *Ampere* 环路定理/电场无旋条件。

[2]不要求 L 必须是简单曲线或 Jordan 曲线，只要满足 $\mathbb{R}^3$ 上的几何都可以

由于静电场的保守性，静电力做功大小和做功路径无关；同时允许定义一个势函数 $\phi(\vec{r})$，使得 $\vec{E}=-\nabla\phi$，自然地可得出电场旋度为 0 的结果。

以上定律仅对真空中的静电场有效；需要注意的是，**Columb 定律同时等价于 Gauss 定理和 Ampere 环路定理**，两者中的任意一个定理是无法推导出 Columb 定律的；而在两者同时成立的情形下可以导出平方反比定律（即 Columb 定律）

2.4 二级结论

重要的对称体系的电场强度计算，如果没有特殊说明，这里都是在使用简单的 Gauss 定理或者 Ampere 环路定理。

例 2.1. *一无限大均匀带电平板，电荷面密度为 σ，则平板两侧电场强度*

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$\hat{n}$ 为平板平面法向的单位向量。这表明，电场方向必然垂直于平板平面。

例 2.2. *一无限长带电直导线[3]带有电荷线密度 λ。则导线周围电场强度*

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$\hat{r}$ 是以导线为中心，垂直导线的平面里径向的单位法向量。可以看出，这个电场表达式与距离有关，以 $1/r$ 的速度衰减。

例 2.3. *均匀带电球壳半径为 R，带电量为 Q，则电场分布为：*

$$\vec{E}=\begin{cases} 0 & (r\le R)\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>R)\end{cases}$$

例 2.4. *均匀带电球体半径为 R，带有电荷密度 ρ。则电场分布为：*

$$\vec{E}=\begin{cases} \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon} & (r\le R)\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>R)\end{cases}$$

均匀带电球体内部的场强决定了：当两个电荷密度反号（即为 $\pm\rho$）的均匀带电半径相同球体几乎重合[4]时，他们重合部分的场强将会是完全匀强的：

$$\vec{E}=\frac{\rho\vec{r}_{ab}}{3\varepsilon_0}$$

$\vec{r}_{ab}$ 是从带正电球指向带负电球的球心的矢径。

例 2.5. *证明上面这个结论对两个不同半径的均匀带电球（电荷密度仍然是 $\pm\rho$）仍然成立。*

孤立导体球在匀强的外电场中，会产生电荷分布来抵消球内部区域的外电场。而**这个电荷分布，在内部区域恰好形成反向匀强电场，而在外部，其可以被等效为一个电偶极子**。

[3]粗细并不很重要，因为我们通常考察的是导线外部的区域。有粗细和无粗细会给出相同的结论——但考察导线内部电场分布时，他们有区别

[4]物理人总喜欢做一些奇怪的假设，比如他们会认为这时候两个球几乎重合但不完全重合，这样，中间重合的部分电荷互相抵消，而边缘没有抵消的电荷可以近似认为是“面电荷”，相当于一个完美的球表面带的电荷——这看起来很扯，但如果我们取一个 $\vec{r}_{ab}\to 0$ 的过程，会发现这是一个数学上完全合法的等效

例 2.6. 证明这个结论，并证明等效电偶极子的偶极矩大小为

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}$$

事实上，我们可以据此求出此时外电场的分布——这是严格解。

引理 2.4.1 (平均场)**.** 闭合导体的某个面元 dS 外部的电场为 $\vec{E}$，那么我们可以用平均场思想，认为该面元和导体剩余部分在此处贡献的电场强度各为 $\frac{1}{2}\vec{E}$

3 电介质

3.1 重要概念

电极化：介质不同于导体，在受外电场作用时产生的电场不能完全抵消外电场，这正是极化电场

位移极化：分子原本电正负中心重合，不表现极性；但在外电场激发下，正负中心偏移，产生极性

取向极化：分子原本电正负中心不重合，等效于一个偶极子；原本排列散乱，宏观的极化电场互相抵消，在外电场作用下顺序排列，形成极化电场；这种极化的强度显著大于位移极化；

3.2 电场强度、极化强度、电位移矢量之间的关系

以下内容在线性各向同性均匀电介质中考虑，并设介质具有相对介电常数 ε_r

定义 3.2.1 (电介质中的特殊矢量[5])**.** 极化强度矢量是在特定体积内，电偶极矩的总贡献。记考察区域的体积为 V，定义式为

$$\vec{P} = \sum_V \vec{p}/V$$

而为了方便起见，我们可以给出一个辅助矢量——电位移矢量，它被定义为：

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

推论 3.2.1. 在各向同性介质中，我们可以额外给出如下关系：

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

同时，这些物理量也具有对应的物理意义：$\vec{P}$ 常常与极化电荷相联系，$\vec{D}$ 与自由电荷相联系，$\vec{E}$ 与体系总的电荷（极化电荷与自由电荷相叠）相联系

比如，可以通过以下方式来求取介质表面的电荷密度（我们假设 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$ 分别是一个界面两侧的电场强度，下面的其他假设类同）：

$$\sigma_{free} = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n} \tag{1}$$

$$\sigma_{polar} = -(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \hat{n} \tag{2}$$

$$\sigma_{total} = \varepsilon_0 (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{n} \tag{3}$$

[5]这两个定义式不要求各向同性均匀介质。换言之，任何电介质中都成立

其中，$\hat{n}$ 是界面的法向量。实际运用中，通常给定了自由电荷的分布（人工撒上去的电荷一般都是所谓自由电荷，比如常见的“把一个带电荷 Q 的球体塞入某介质中”，那么这里的 Q 即为自由电荷）；如果能够确定自由电荷本身的分布没有发生改变，则可以先求取 $\vec{D}$，然后利用上面的公式反求 $\vec{E}$。

以上式子也正是静电场（含介质）问题的边界条件（法向条件）。值得注意的是，有一个式子比较特殊，在含有静电场问题的时候，由于所知道的量通常是自由电荷，可得到推论：

推论 3.2.2. *若介质界面不存在自由电荷，则介质法向的电位移矢量 $\vec{D}$ 连续*

边界条件的另外一部分是所谓切向条件：

推论 3.2.3. *$\vec{E}$ 切向分量在介质分界处是连续的（也即在分界面两侧，切向电场强度相等；但这意味着，$\vec{D}$ 和 $\vec{P}$ 的切向分量是可以发生突变的）。利用环路定理可以证明，这式子等价于***介质界面两侧电势连续**

3.3 边界和特殊线重合的情况

首先给出两个引理：

引理 3.3.1 (介质边界与电场线重合). *当介质的边界和电场线重合时，电场强度 $\vec{E}$ 在介质存在与否时同分布；换言之，对单一体系，任意处的在有无介质时电场强度都只相差同一个因数 α；*

这个定理常用于计算类似球对称体系按照角度剖分的情形。据此引理，我们知道介质不存在时，电场是球对称分布的。然后利用引理，我们知道在介质中仍然有球对称分布的电场。然后就可以用介质存在时的 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ 计算各处的电场强度。

引理 3.3.2 (介质边界与电场线垂直). *当介质的边界和等势线重合时，电位移矢量 $\vec{D}$ 在介质存在与否时保持一致。*

解决此类问题时可以先忽略电介质，计算出电位移 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{free}$，接着考虑电介质，能保证电位移矢量 $\vec{D}$ 不变；于是可以直接用 $\vec{E'} = \vec{D}/(\varepsilon_r \varepsilon_0)$ 求出电介质体系下的电场强度。

4 静电场的能量问题

4.1 点电荷体系相互作用能的几种表述

相互作用表述（求和指标对称）：

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq N}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{4}$$

相互作用表述（求和指标不对称）：

$$E = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{5}$$

势能表述：

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i U(\vec{r_i}) \tag{6}$$

其中 $U(\vec{r_i})$ 表示的是，**除了** $\vec{r_i}$ 处的那个电荷 q_i 其他的电荷在该处产生的电势之和。

4.2 自能

线电荷和面电荷不能计算自能（发散困难），而体电荷体系是可以定义自能的：

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\iiint_D \rho_e(\vec{r})U(\vec{r})\mathrm{d}V \tag{7}$$

这里的 $U(\vec{r})$ 是整个体系中，仅除去 $\vec{r}$ 一点的电荷量，剩下所有的电荷引起的电势；由于 $\mathrm{d}V \to 0$，可以从数学上证明这个电势等价于完整的整个体系产生的电势。所以要特别注意电势绝对值（以无穷远为电势 0 点计算是比较保险的）

例 4.1. *求一个均匀带电（电荷密度为 ρ），半径为 R 的带电球体的自能。*

解. [定义法]
根据定义，我们考虑带电部分（球内区域），给出球内部分的电势：

$$U(\vec{r}) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

然后积分给出自能：

$$\begin{aligned}
W_{\text{自}} &= \frac{1}{2}\iiint\limits_{r<=R} \rho \cdot \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\rho^2}{12\varepsilon_0}\int_0^R (3R^2 - r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

□

另一种计算自能的方法是：构造某种方法，将许多本来散布在无穷远、且没有相互作用的电荷移动并形成待求的体系；此过程中所花费的功即为体系的自能。（例子：计算均匀带电球的自能，可以构造一个“分层制造球壳”的方案进行计算）

解. [构造过程法]
我们构造一个分层转移球壳的过程，将一层层厚度为 $\mathrm{d}r$ 的球壳从无穷远搬运到应该所处的位置。计算这中间花费的所有做功（考察电势能改变）

应该在 r 处的那一层球壳带电量 $q_2 = 4\pi\rho r^2\mathrm{d}r$，搬运时已有的电荷总量为 $q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$，于是将 q_2 从无穷远搬运到 r 处所需要的能量正是两者之间的相互作用能：$\mathrm{d}W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$

$$\begin{aligned}
W_{\text{自}} &= \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 \cdot 4\pi\rho r^2\mathrm{d}r}{r} \\
&= \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

□

另一种方法是，考虑体系的能量密度 $\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$，对于全空间积分可以得到体系的自能。对上面的球体也可得到同样的结果，此处暂时不计算（留待有空时计算）

4.3 能量密度及其物理意义

在真空中，体系的能量密度可以被定义为

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

考虑极化，极化后的电场强度分为两部分：极化电荷所持的极化能，和电场能

$$\omega_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$
$$\omega_{polar} = \frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}$$

所谓的“电场能”是不依赖介电常数的，但是真正可用的能量是静电能（密度）ω_e。

回到真空中的情形，利用虚功原理可以得到一个重要的结论：

推论 4.3.1 (电场能量密度和静电力的关系[6])**.** *处于静电场中的某个面元 $\mathrm{d}S$ 受到外电场的作用力大小恰为 $\mathrm{d}F = \omega\mathrm{d}S$，其中 $\mathrm{d}\omega$ 是板所处环境中的电场能量密度*

此结论非常适合用来解平行板电容器的极板受力问题，可以立即得到解答。

4.4 虚功原理

常常用来解决液面升高问题和介质板抽离问题。

例 4.2. *在抽介质/抽电容器板的问题中，如果电容器不连接电源，则能够保持电容器电荷不变，此时外力的虚功与能量改变之和为 0：*

$$F = -\frac{\delta W}{\delta r}$$

这里 W 指的是电容器内部的总能量，下同。

一个变种问题是，如果电容器不连接电源，想要转动某个板/电介质，所花费的力矩满足

$$L = -\frac{\delta W}{\delta\theta}$$

例 4.3. *如果电容器连接了电源，则除了以上的分析外，还会有一个电源做功项。在平凡情况下，将会恰好得到外力的虚功正等于能量改变：*

$$F = \frac{\delta W}{\delta r}$$

同样，如果是转动的情形，转动所需的力矩为

$$L = \frac{\delta W}{\delta\theta}$$

5 电像法

5.1 猜测的艺术——电像法是什么

求解静电场，本质上是一个偏微分方程问题：我们只需要在给定的边值条件 $\varphi(\vec{r}),\rho(\vec{r})$ 下，求解如下的偏微分方程：

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

[6]这里只考虑真空中情形的原因是，考虑介质时存在一个问题：两块板夹一块电介质和两块板浸泡在电介质内是两个不同的模型。确切地说，前者应该认为，板实际所处的环境介电常数是 ε_0，而后者板所处的环境介电常数是 $\varepsilon_0\varepsilon_r$，这种时候也要分别计算这两种环境内的电场强度，而不能全部用介质中的电场强度去计算 ω

这是 Poisson 方程，在 $\rho(\vec{r})=0$ 处，求解会稍显容易——因为这退化为调和方程[7]。但为了求取全空间的解析解，我们还是希望有一套行之有效的办法来处理一些简单的体系，避免在任何情况下都陷入痛苦繁冗的求解中[8]。

幸运的是，Poisson 方程有一个很好的性质：

定理 5.1.1 (唯一性定理[9]). *若给定第一类边界条件，即电荷密度 ρ 在所研究区域 V 的边界 ∂V 上的取值，则满足 Poisson 方程的静电场解是唯一的。*

而电像法，更广义地说，就是一种试探解。我们根据经验和对称性，猜测一些可能合理的解，然后进行检证——如果猜测解能够在全空间[10]满足 Poisson 方程，则唯一性定理确保了这个解一定是正确的。

5.2 两个经典的例子

例 5.1. *一个电荷 q 放在无限大接地金属平板距离为 d 处，求金属板上面的电荷分布。*

例 5.2. *一个半径为 R 的中空金属球，在距离球心为 d 处放置了一个电荷 q。在以下情形中，分别求空间电场：*

1. *金属球接地，$d<R$*
2. *金属球接地，$d>R$*
3. *金属球原本不带电荷，$d>R$*
4. *金属球原本带电荷 Q，$d>R$*

5.3 电像法的注意事项

能量问题：电像法中的能量问题素来是一个扯皮很多的事情，但这里我们只要遵循一个原则：

引理 5.3.1 (像电荷能量). *像电荷的任何能量在能量守恒计算中不应该被考虑[11]。换言之，像电荷不“具有”电势能。*

推论 5.3.2 (计算离散带电像体系电势能). *在计算离散带电像体系的电势能时，像电荷与像电荷间的相互作用能不计，像电荷与真实电荷之间的相互作用能计 $\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d}$。真实电荷之间相互作用能记为 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d}$*

而在外场中，像电荷激发的电势还是照常计算的（这与上面的推论是自洽的）。

有效区域问题：问题中的导体边界通常将全空间分为若干个区域，需要注意的是，像电荷等效只在像电荷所处区域**以外**生效，在生效区域它和点电荷完全无差别（计算能量除外，上面已经提到）。而在像电荷所处区域内，其作用效果与外场恰好相互抵消，从而实现静电平衡。

[7] 尽管这解的求解难度还是难得超乎想象，但，who cares——数学人和计算机总会帮你解决这个问题

[8] 过度的和 Trivial 的数学会极大抹杀物理的美感

[9] 我不会证明，但不妨碍我用

[10] 电荷存在的奇点除外

[11] 这件事情解释起来很复杂，一个直观的例子是例 5.1。如果将电荷移动，按照受力方法来计算，将会给出我们所预言的能量改变，但实际上平板上的电荷分布有所改变，而这部分能量我们是没有计入的。当然，你可以 Argue 说这是因为接地平板势能为 0，但不接地的情形也会有这个问题。所以我们从不考虑像电荷本身的电势能，而实验证明这是正确的（理论证明懒得证了）

6 稳恒电流

6.1 稳恒条件和微观定律

电流密度的定义：

定义 6.1.1 (电流密度). $\mathbb{R}^3$ 空间中某曲面 S，其上有电流 I 通过，则电流密度矢量定义为单位面积上流过的电流强度，也即满足 $\iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = I$

定理 6.1.1 (电流的稳恒条件). 设 $\mathbb{R}^3$ 空间中有一闭合曲面 S，矢量场 $\vec{j}(\vec{r})$ 是电流密度矢量，则下列式被称为积分形式的稳恒电流条件：

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

其中，q 为闭合曲面 S 所包围空间的总电荷量。而它具有等价的微分形式：

$$\nabla\cdot\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

其中，$\rho(\vec{r},t)$ 是空间中点在某时刻的电荷体密度。

定理 6.1.2 (Ohm 定律). 设 $\mathbb{R}^3$ 空间中，矢量场 $\vec{j}(\vec{r})$ 是电流密度，矢量场 $\vec{E}(\vec{r})$ 是所谓的稳恒电场强度。*Ohm* 定律表明：

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

其中，σ 是电导率，它是介质的固有属性。其与介质的电阻率 ρ_R 存在倒逆关系：$\sigma\rho_R = 1$

定理 6.1.3 (Joule 定律). 矢量场 $\vec{j}(\vec{r})$ 是电流密度，则在 $\vec{r}$ 处的体元，其热功率密度（单位体积热功率）为：

$$p = \frac{j^2}{\sigma}$$

6.2 稳恒电路

定义 6.2.1 (电源电动势). 在可区分内外电路的电路中，非静电力 $\vec{K}$ 只能在电源中存在，此时电源的电动势定义为：

$$\varepsilon = \int_-^+ \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

如果无法区分内外电路，则电动势重新定义为：

$$\varepsilon = \oint_L \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在一个稳恒电路中，所有的导体都满足稳恒条件（这和静电平衡条件略有不同），电荷只能出现在导体表面或**导体内部非均匀部分**。“稳恒电场”实际上不是静电场，并且一定要理解：不是电流形成电场，而是电场驱动、形成并维持了稳恒电流。

求解稳恒电路的过程中，会涉及到如下两个基本方程[12]，这里描述如下：

定理 6.2.1 (Kirchhoff 第一定律). 汇合于任一节点处的各电流的代数和为 0，也即：

$$\sum I = \sum I_{in} - \sum I_{out} = 0$$

这定理也常被称为 Kirchhoff 节点电流方程（KCL）

[12]他们实际上在时变电路中也成立

定理 6.2.2 (Kirchhoff 第二定律)**.** 电路中的任一闭合回路的全部支路上的电压的代数和等于 *0*，也即

$$\sum U = \sum (\pm\varepsilon \pm Ir \pm IR) = 0$$

其中 r 是电源内阻，ε 是电源电动势，R 是电路的负载电阻，根据 I 的方向来标记正负号。

这定理也常被称为 Kirchhoff 回路电压方程（KVL）

例 6.1 (常用的电路解法)**.** 节点电压法，支路电流法，回路电压法——本质：线性电路满足叠加原理

6.3 电场问题综合求解

这里主要是在对称性较强的体系中，我们需要综合利用以下的基本方程：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

然后考虑边界条件：

$$\hat{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{j}_1 - \vec{j}_2) = 0$$

这两个方程分别刻画了电场的切向分量连续，电流密度的法向分量连续。

例 6.2. 漏电电容器（《电磁学与电动力学（上册)》*P109*）

例 6.3. 针状电极。思考：可以存在尺寸忽略不计的电极吗？

例 6.4. 稳恒电路与静电场问题的类比：$\vec{j}\leftrightarrow\vec{D}_i$，$\vec{E}\leftrightarrow\vec{E}_i$，$\sigma\leftrightarrow\varepsilon_i$。此时就可以暂时忽略掉原有的电介质和电导率，按照静电问题解出虚拟量。试再解一遍例 *6.2*。