

定理 设 $f = u + iv \in H(D)$ 且 $f'(z) \neq 0$, 则

等值曲线族 $u(x,y) = k_1, v(x,y) = k_2$

在公共点上 是互相正交的, k_1, k_2 为常数.

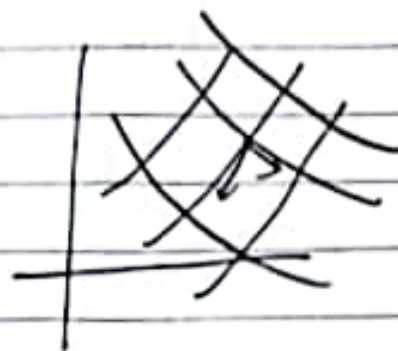
证: $\vec{n}_1 = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \neq \vec{0}$

$$\vec{n}_2 = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}) \neq \vec{0}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 0.$$

所以 两个曲线在公共点上互相正交



注: 书上在这讲这个定理, 但目前似乎用不到.



解析函数的级数展开

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

称为复数项无穷级数

部分和: $S_n = \sum_{k=1}^n z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n$

若 $\{S_n\}$ 存在极限 $S \in \mathbb{C}$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

则称此级数是收敛的.

S 称为级数的和. 记作 $S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

否则称为发散.

若 $a_n = \operatorname{Re} z_n, \quad b_n = \operatorname{Im} z_n$

则 $S_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + i \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$.

定理: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛于 $S = a + ib$,

当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛于 a , 且 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛于 b .

Date: /



定理 (柯西收敛准则)

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛的充要条件:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

推论: 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛,

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

例: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 不收敛.

注: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 不能推出 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛

例: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 不收敛.

定义: 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 收敛, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛.

定理: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛, $(z_k = a_k + ib_k)$

当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都绝对收敛



定理: 若 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛, 则它一定收敛.

定义: 设 $\{f_k(z)\}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 的子集 E 上的一列复变函数.

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_k(z) + \cdots$$

称为 E 上的一个复变函数项级数.

设 $z_0 \in E$, 若 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ 收敛, 则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 点收敛.}$$

若在 E 上的每个点收敛, 则称

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \text{ 在 } E \text{ 上收敛.}$$

它定义了 E 上的一个函数

$$\forall z \in E, F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

$$\text{例: } \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad C_n, a \in \mathbb{C}$$

幂级数. 这是我们后面要重点讨论的.



问：能否逐项求导？

(即：求和与求导能否换次序？)

能否逐项积分？

(即：求和与求积分能否换次序？)

$$F^{(n)}(z) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right)^{(n)}$$

$$? \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$$

$$\int_C F(z) dz = \int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz.$$

$$\text{幂级数: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad a_n, a \in \mathbb{C}$$

不妨设 $a=0$.

定义：若 $\exists R>0$, 使得当 $|z|<R$ 时,



$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛, 当 $|z| > R$ 时, 发散.

就称 R 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径.

$\{z: |z| < R\}$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛圆.

定理: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在,

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 有收敛半径 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

注: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 则 $R = 0$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 则 $R = \infty$.

注: 更一般的公式: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ 上极限

另一个公式 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$



证明: 要证:

(i) 当 $R=0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z=0$ 处收敛.

(ii) 当 $R=\infty$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 中处处收敛.

(iii) 当 $0 < R < \infty$ 时, 在 $|z| < R$ 上收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.

(i) $z=0$ 处显然收敛.

现设 $z \neq 0$, $R=0$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$.
固定 z .

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$.

$|a_n z^n| > 1$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n \neq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 不收敛.

(ii) $\forall z \neq 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|}$.

$|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 收敛.

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛.

