

9.20

证明 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

证：由 Cauchy 积分定理

在 C 围的区域内找一个围着 z 的圆 Γ_p ,

半径为 p .

(p 可以任意小).

则有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\Gamma_p} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$= \underbrace{\int_{\Gamma_p} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi}_{\rightarrow 0 \text{ (当 } p \rightarrow 0)} + \underbrace{\int_{\Gamma_p} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi}_{= 2\pi i f(z)}$$

$$= 2\pi i f(z).$$

按导数的定义, $\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \rightarrow f'(z) \text{ (} \xi \rightarrow z \text{)}$

所以, 只要 p 足够小, 这个积分差不多就是 $f'(z)p$, 随 $p \rightarrow 0$ 而趋于 0.

(这么写不太严谨, 严谨地写:



对 $\varepsilon=1$, $\exists \delta$, 当 $\rho < \delta$ 时,

对 ~~ρ~~ $|\xi - z| = \rho$,

$$\left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z) \right| < 1$$

$$\left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| < |f'(z)| + 1$$

$$\text{所以 } \left| \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq (|f'(z)| + 1) \cdot 2\pi\rho$$

~~由于对任意小的 ρ 此式都成立~~

(我写的跟老师有点不一样,

$$\text{老师是说 } \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| = \frac{|f(\xi) - f(z)|}{\rho}$$

而 f 在 z 连续, 所以 $|f(\xi) - f(z)| \rightarrow 0$

) $\square$



定理：在上述定理的条件下， f 在 z 处有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad n \in \mathbb{N}.$$

注：有了 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$.

形式上计算

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \right)' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \right). \end{aligned}$$

这样，类似地就推出

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi.$$

这只是帮你记住公式。

这不是证明！

证：只证 $n=1$ 的情形。其后用数学归纳法。

证明请自行看书。



例:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+6)}$$

在 $|z|=2$ 内部有 $\frac{1}{z^2+6}$ 解析.

$$\text{所以 } \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{1}{z^2+6}}{z^2} dz$$

$$= \left(\frac{1}{z^2+6} \right)' \Big|_{z=0}$$

$$= 0. \quad I=0.$$

平均值公式:

设 f 在闭圆 $\overline{B(a, r)}$ 上解析,

$$\text{则 } f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta.$$

$$\text{证: } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$$

$$(\text{令 } \xi = a + Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta.$$



最大模原理 (Cauchy 积分公式的推论)

设 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$

在 D 内解析, 在 $\bar{D}$ 上连续.

(H 的含义是 holomorphic, 即解析).

D 为有界域 且 f 不为常值.

则 $|f|$ 不可能在 D 的任一内点处达到最大值.

Cauchy 积分公式 $\Rightarrow$

f 解析 (~~解析~~) $\Rightarrow f^{(n)}(z)$ 存在.
(区域内 n -阶导存在)
~~解析~~

原函数:

函 若 $F'(z) = f(z)$ 在区域 D 内成立,

则称 F 为 f 在区域 D 内的一个原函数.

原函数未必存在!

例:

在 D 上 $\frac{1}{z}$ 没有原函数



$$D = B(0,1) \setminus \{0\}$$

$\frac{1}{z}$ 是 D 上的解析函数.

如果 $F'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in D$. 设 γ 是一个围绕 0 的曲线.

则 $\int_{\gamma} F'(z) dz = 0$
(微分积分基本定理)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \quad \text{矛盾!}$$



上面的例子, 问题出在区域 D .
它不是单连通的.

定理: 若 $f \in H(D)$, D 为单连通域,

$$\text{那么 } F(z) := \int_{z_0}^z f(z) dz$$

(z_0 为 D 内固定一点)

为 D 上的解析函数.

$$\text{且 } \cancel{F(z)} \quad F'(z) = f(z).$$

