

9.13

根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 为幂函数 $z = w^n$ 的反函数
($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)

必须限制在单叶区域上, 才能定义反函数!

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

给一个 $z \neq 0$, 有 n 个 w 与之对应.

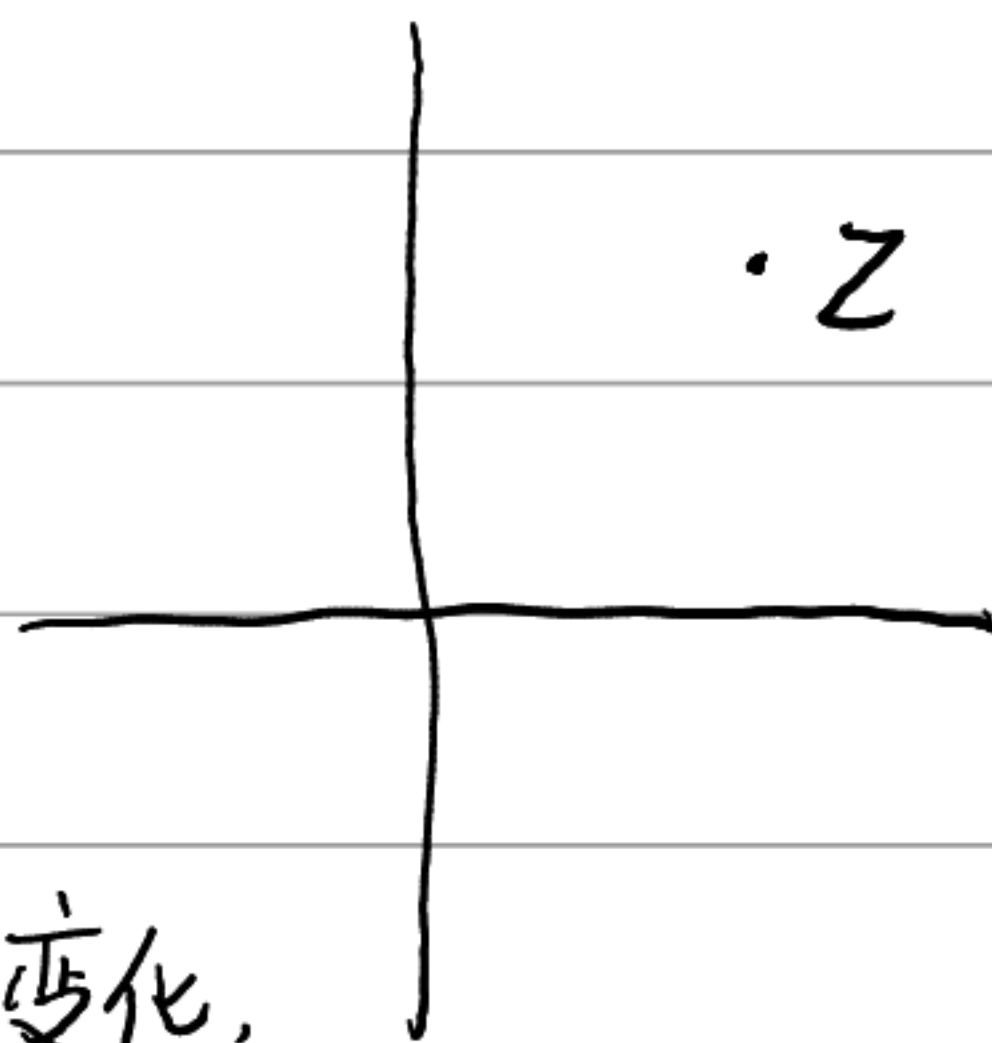
故 $w = \sqrt[n]{z}$ 是多值函数.

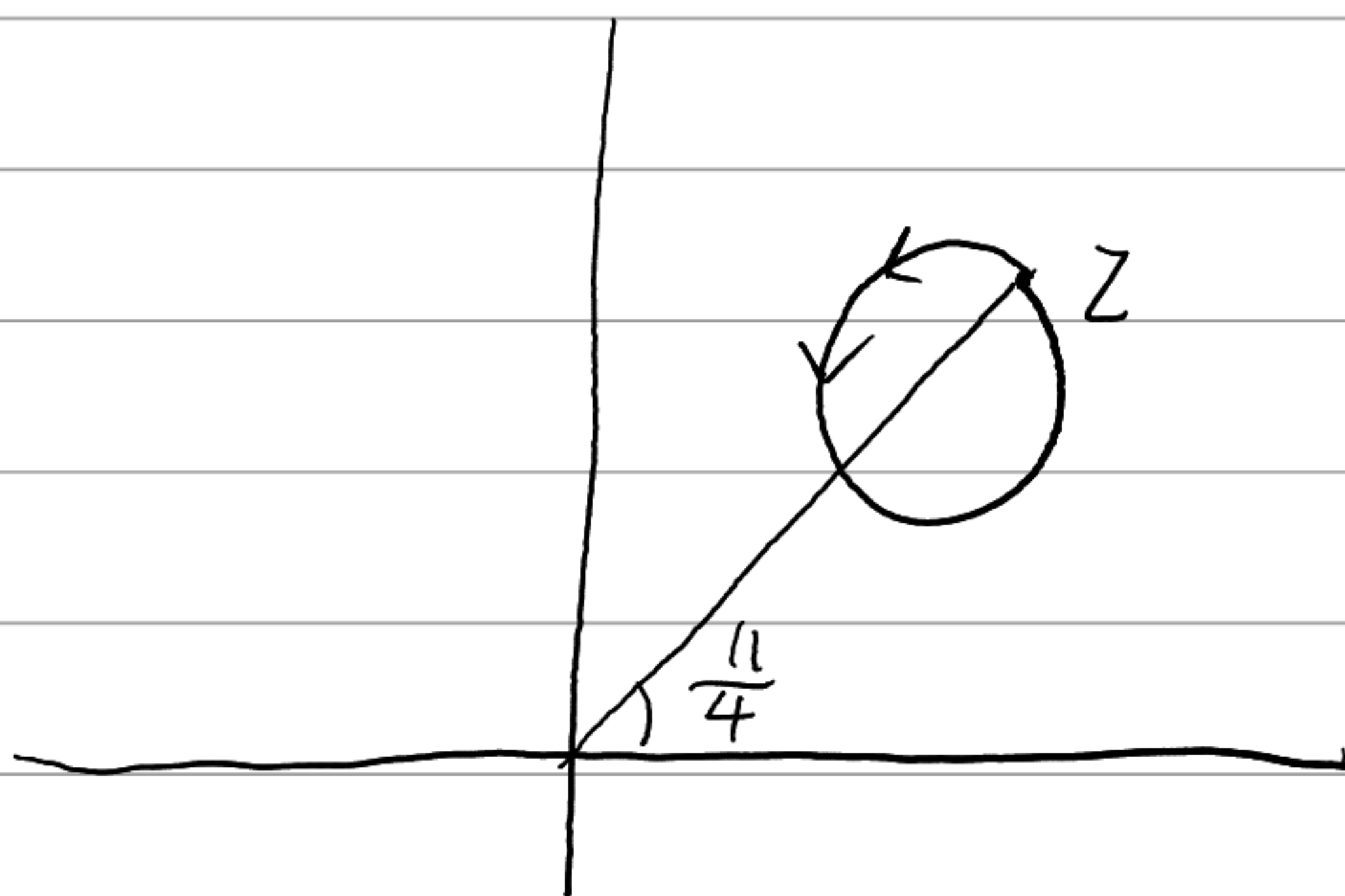
出现多值性的原因: z 确定, 其辐角并不唯一.

例: $w = f(z) = \operatorname{Arg} z$

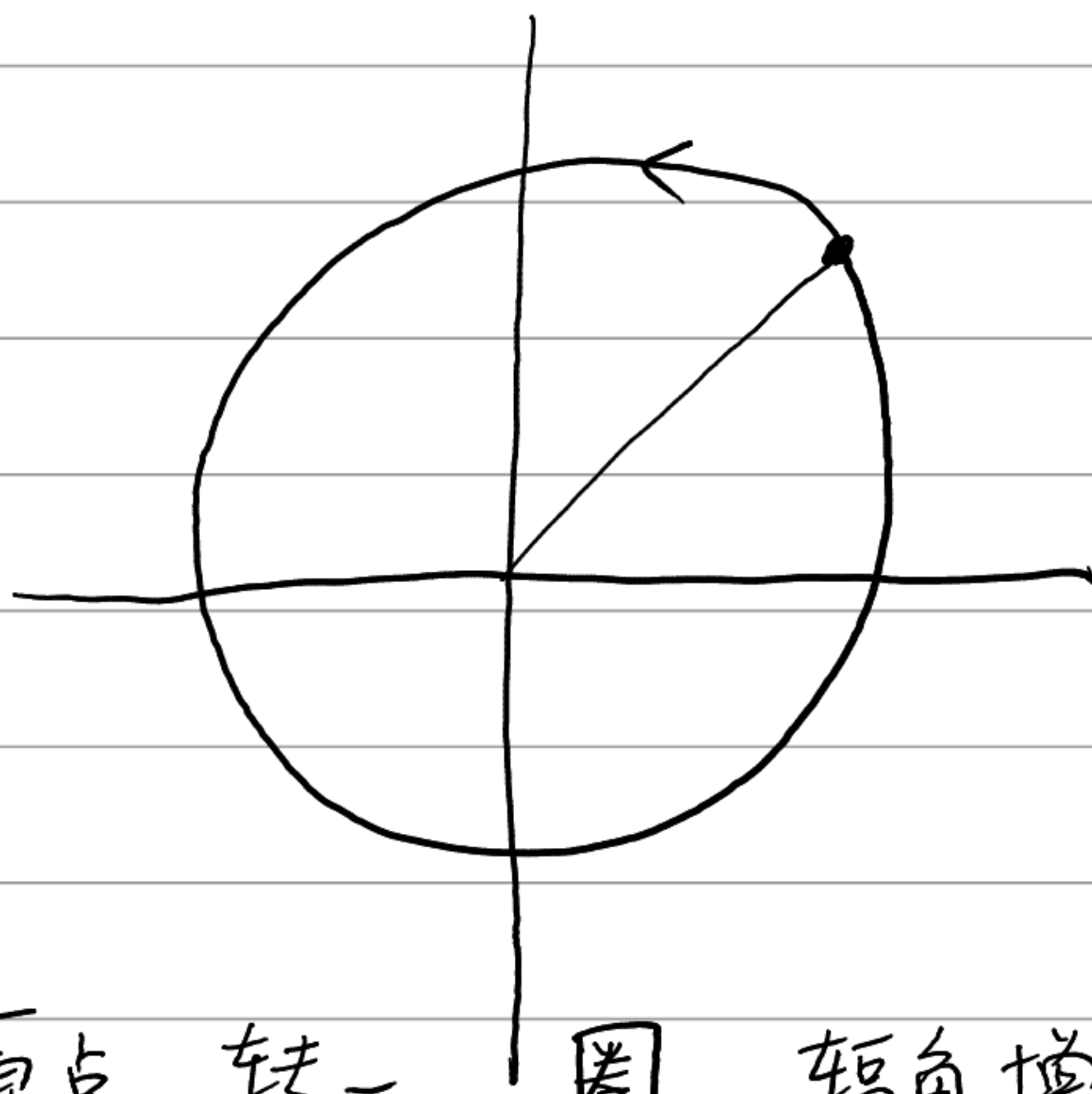
在定义域内任意指定一点,
并指定一个辐角值.

从该点出发 让 辐角连续变化,

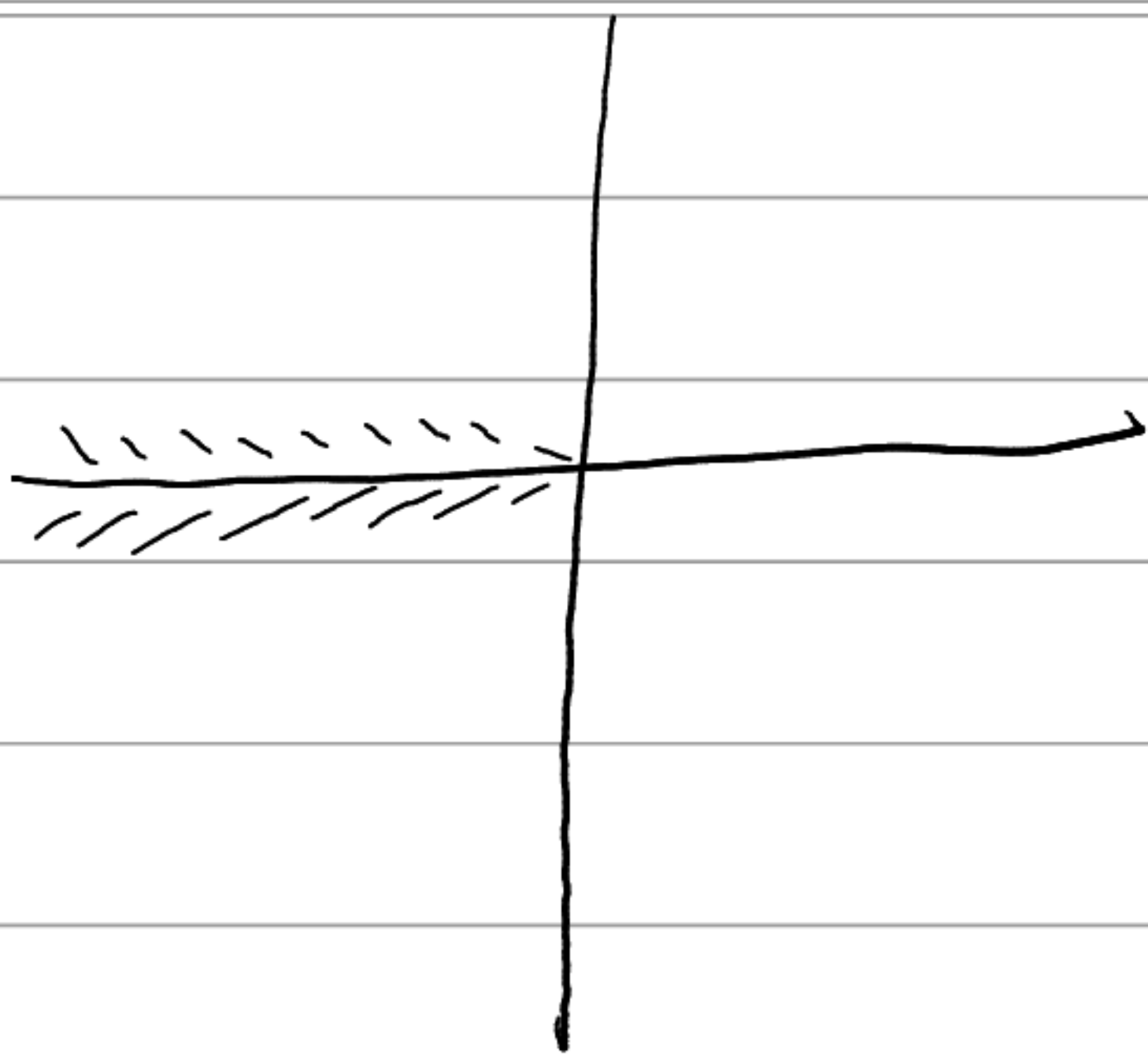




从 z 出发，不绕原点转一圈，回到出发点，辐角不变，函数值不变。



绕原点转一圈，辐角增加 2π ，
故函数值变大 2π (在同一点处)，导致 f 不连续。



$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k \quad (\sqrt[n]{z} \text{ 的第 } k \text{ 个取值})$$

$$w_k : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow T_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

这些 w_k 称为 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个单值分支.

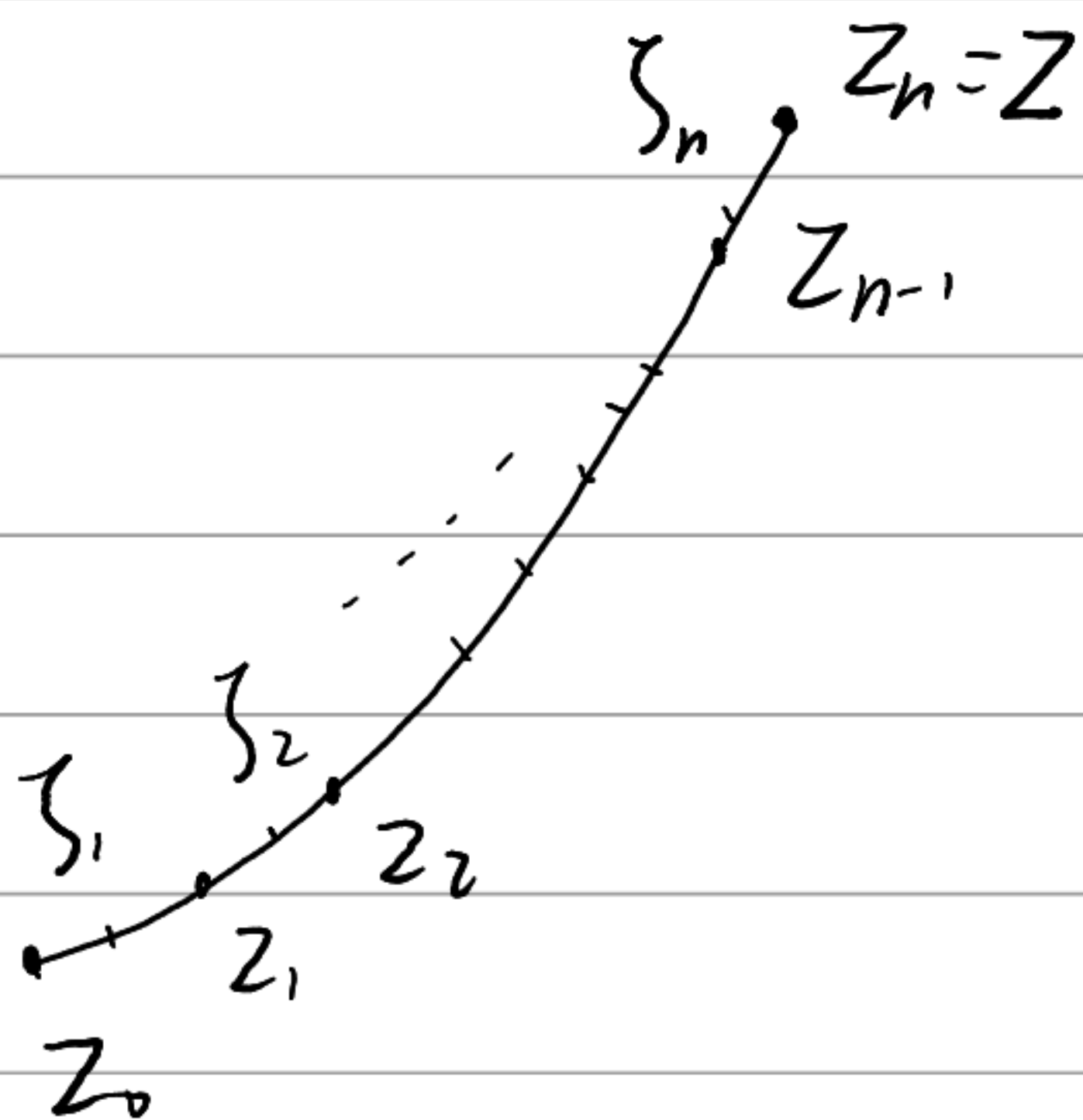
第3章 解析函数的积分表示

定义：设 C 是平面上的一条 逐段光滑 的曲线，
一段一段，每段连续可微。

起点 z_0 ，终点 z 。

$f(z)$ 是定义在曲线 C 上的单值连续函数。

沿 C 的正方向取分点 $z_0, z_1, \dots, z_n = z$



在 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上取点 ζ_k $k=1, 2, \dots, n$ 。

作 Riemann 和 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ ($\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$)

Δz_k 是一个复数

$f(\zeta_k)$ 也是一个复数

当 $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0$

不论弧段如何划分, ζ_k 如何取,

如果 Riemann 和总有确定的极限.

称此极限为 f 沿 C 的积分.

(f 自 z_0 到 z 的积分).

记作 $\int_C f(z) dz$.

约定: 以后提到的曲线都是光滑或逐段光滑的.

定理：设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在曲线 C 上连续，则复积分

$\int_C f(z) dz$ 存在，且可表示为两个线积分的和， $\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy$

$$+ i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

注：好算的： $C: \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$

$$z(t) = x(t) + i y(t) \quad \gamma(a) = z_0 \quad \gamma(b) = z$$

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

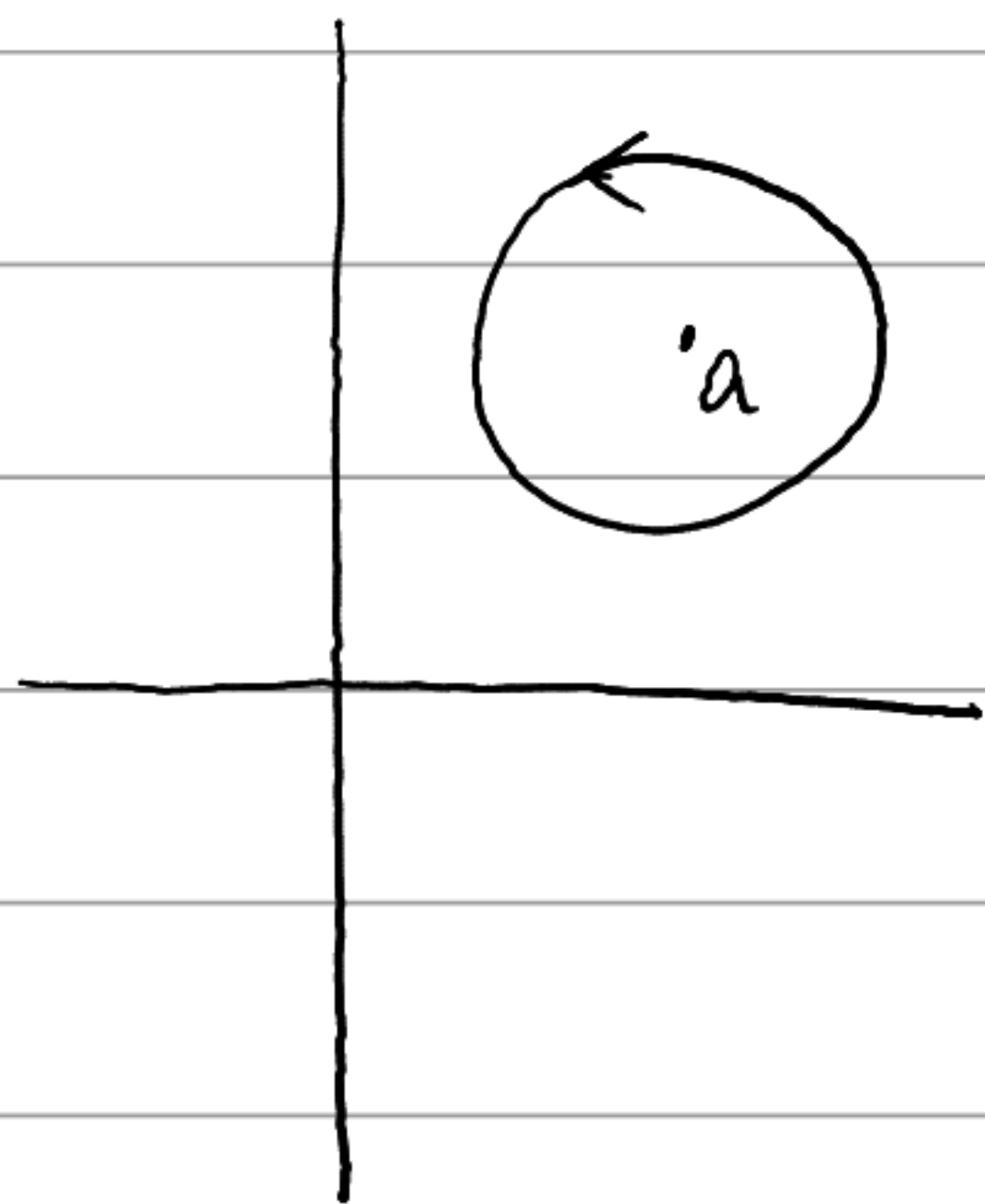
$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$= \int_a^b f(x(t) + i y(t)) (x'(t) + i y'(t)) dt$$

例：设 C 是以 a 为中心， R 为半径的圆周。

按逆时针方向计算积分 $\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$

$n \in \mathbb{Z}$



先判断积分是否存在。

由于 $\frac{1}{(z-a)^n}$ 在 C 上连续，所以积分存在。

解：设 C 的参数方程为 $z(\theta) = a + Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + Re^{i\theta} - a)^n} (iRe^{i\theta}) d\theta$$

$$= R^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{i\theta(1-n)} d\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & \text{若 } n=1. \\ 0, & \text{若 } n \neq 1. \end{cases}$$

此结果将反复用到。

性质:

1° 线性

$$k_1, k_2 \in \mathbb{C},$$

$$\int_C k_1 f(z) + k_2 g(z) dz$$

$$= k_1 \int_C f(z) dz + k_2 \int_C g(z) dz$$

$$2^\circ \quad \int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

C^- 表示与 C 重合但方向相反的曲线.

$$3^\circ \quad \int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

γ 是 γ_1 与 γ_2 衔接而成的曲线.