Thm: $f(z)$ 复可微 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)$ 实可微且满足 C-R 方程

Pf: $\Rightarrow$ 设 $f'(z)=a+ib$ 则 $f(z+\Delta z)-f(z)=(a+ib)\Delta z+o(|\Delta z|)$

令 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ $u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-(u(x,y)+iv(x,y))$

$=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)$ 展开并分别取实部虚部,得

$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

由定义知 u,v 在 (x,y) 处可微且有

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=a$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-b$ $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=b$ $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=a$ 得到C-R eq.

$\Leftarrow$ 上述推导过程反过来即可

Def: 设 $w=f(z)$ 是域D内解析函数(就是可微的意思) 若f是一一映射 则称f是D内的单叶解析函数 D称为f的单叶性区域

Def: 指数函数 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

Rmk: $(e^z)'=e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析 $|e^z|=e^x$ $e^z\neq 0$

$\lim\limits_{z\to+\infty}e^z$ 不存在 $\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}e^{iy} \text{ 不存在} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$ $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

若 $e^{z_1}=e^{z_2}$ 则 $z_1=z_2+2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z}$

Thm: 区域D为 $w=f(z)=e^z$ 的单叶性域 $\Leftrightarrow$ D内不含有 z_1,z_2 满足 $z_1-z_2=2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z}$ $k\neq 0$

Pf: 显然 不证.

Prop: $w=e^z$ 把 $a<\mathrm{Im}\,z<b$ $(b-a\leq 2\pi)$ 带状域单叶地映为角状域 $a<\arg w<b$.

Def: 三角函数 $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Rmk: 定义是由 $\begin{cases}e^{ix}=\cos x+i\sin x \\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x\end{cases}$ 中x换成复数z 再解方程得到的

三角函数在 $\mathbb{C}$ 上解析(由指数函数解析性推出)

$(\sin z)'=\cos z$ $(\cos z)'=\sin z$ 以 2π 为周期

$\sin z=0\Leftrightarrow z=n\pi, n\in\mathbb{Z}$ $\cos z=0\Leftrightarrow z=(n+\frac{1}{2})\pi, n\in\mathbb{Z}$

$\sin z$ 奇 $\cos z$ 偶 $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$

$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$\cos^2 z+\sin^2 z=1$ 其它的三角恒等变换也都可适用(不证)

Rmk: $\sin z$ $\cos z$ 不是有界的 如 $\cos(iy)=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\to\infty\ (y\to+\infty)$

$\sin(\frac{\pi}{2}+iy)=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\to\infty\ (y\to+\infty)$

最后 $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ $\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$ 性质也都不变

Def: 双曲余弦 $\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ ~~sinhz~~ 双曲正弦 $\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

双曲正切 $\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}$ 双曲余弦 $\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$

$\sinh z=-i\sin(iz)$ $\cosh z=\cos(iz)$

Def: 对数函数记作 ~~w=lnz~~ $w=Ln(z)$

$Ln(z)=\ln|z|+i\,Arg(z)=\ln|z|+i(\arg(z)+2k\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$

$Ln z$ 的主值 $\ln z=\ln|z|+i\arg(z)$ $-\pi<\arg z<\pi$

Rmk: $Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$ $Ln(\frac{z_1}{z_2})=Ln(z_1)-Ln(z_2)$

设 $D=\{z:-\pi<\arg z<\pi\}$ 则 Ln 将 D 映到 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

$w_k=(Ln z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$ $k\in\mathbb{Z}$, $-\pi<\arg z<\pi$

$\frac{dw_k}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw_k}}=\frac{1}{e^{w}}=\frac{1}{z}$ 多值性有点复杂

但对大家要求不高的

Def: 幂函数: $n\in\mathbb{N}$ $w=z^n$ $z\in\mathbb{C}$

考虑角状域 $\{z:\alpha<\arg z<\beta,\ 0<\beta-\alpha\leq\frac{2\pi}{n}\}$

则 $w=z^n$ 将上述域映为 $\{w:n\alpha<\arg w<n\beta\}$

容易说明 $w=z^n$ 限制在上述角状域为单射