

上节课 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ 已经定义好了, 形式上看同
实函数没有区别

定义: 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

则称 f 在 z_0 处连续.

定义: 若 f 在区域 D 中每点处连续, 称 f 在
 D 中连续.

定理: 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

~~$u(x, y), v(x, y)$ 是取值为实数~~

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

则 f 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件

是 $u(x, y), v(x, y)$ 作为二元函数在 (x_0, y_0)
连续.

$$\begin{aligned} \text{证明: } |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &\leq |f(z) - f(z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \\ &\quad + |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \\ &\text{或} \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| &\leq |f(z) - f(z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \\ &\quad + |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \end{aligned}$$



注：连续函数的和、差、积、商、复合仍连续

恒等函数 $f_1(z) = z$ 连续

幂函数 $f_2(z) = z^n$ 连续

多项式函数 $f_3(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ 连续

有理函数 $R(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$

连续. (在分母不为零处).

导数 解析函数

定义：区域 D 上的函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$

$z_0 \in D$, 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 存在,

就称 f 在 z_0 处可导/可微.

这个极限称为 f 在 z_0 处的导数(微商).

记为 $f'(z)$ 或 $\frac{df}{dz}(z)$



定义: 若 f 在域 D 中每点都可微, 则称 f 是域 D 中的 解析函数.
(全纯函数).

若 f 在 z 的一个邻域中解析, 就称 f 在 z 处解析.

若 f 在 z 处不解析, 则称 z 为 f 的奇点.

~~导数~~ 导数的定义式 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$\Leftrightarrow$ ~~f~~

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|)$$

~~$(-o(|\Delta z|))$~~

$(o(|\Delta z|))$ 的定义就是: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$.

由此可见, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时, $f(z_0 + \Delta z) \rightarrow f(z_0)$.

所以, 可导 $\Rightarrow$ 连续.

反之, 连续未必可导. 例: $f(z) = \bar{z}$.



$f(z) = \bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中每一点都连续,

但处处不可微.

证: $f(z) = x - iy$ (设 $z = x + iy$)

$$u(x, y) = x \quad v(x, y) = -y.$$

连续. 所以 $f(z)$ 连续.

但 $f(z)$ 不可微.

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} \\ &= \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \end{aligned}$$

当 Δz 沿着实轴 $\rightarrow 0$ 时, $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$

当 Δz 沿着虚轴 $\rightarrow 0$ 时, $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$

所以 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 极限不存在.

所以 $f(z)$ 不可微.



在微积分中找处处连续但处处不可微的函数很难(历史上人们长期以为没有这样的函数).

但在复变函数中很多, 如 $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$.

具体的计算导数:

例: $w = z^n$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = ?$$

$$(z + \Delta z)^n = z^n + n z^{n-1} \Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z^2 + \dots + (\Delta z)^n$$

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1} + \Delta z (\binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots + \Delta z^{n-1})$$

$\Delta z \rightarrow 0$ 时, 上式 $\rightarrow n z^{n-1}$.

$$\text{所以 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1}.$$

即 $(z^n)' = n z^{n-1}$. 和微积分是一样的.



求导法则 (和微积分一样)

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) g'(z)$$

设 $w = f(z)$, $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ $w = f(z)$.

刚才已经说了: 复变函数连续

$\Leftrightarrow$ 实部、虚部都连续.

那么, 可导 是否 $\Leftrightarrow$ 实部、虚部都可导?

回答: 柯西-黎曼方程



u, v 作为二元实函数 在 (x, y) 处可微,
且 Cauchy-Riemann 方程成立

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{简记为} \\ \text{C-R 方程} \end{array} \right)$$

是 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 (x, y) 处可微
的充要条件.

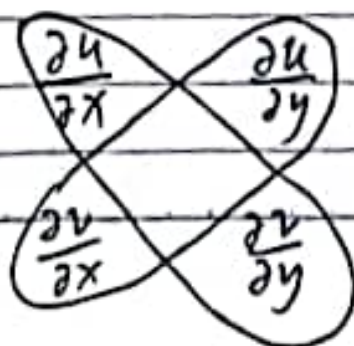
提醒: 回忆一下什么叫实函数的可微性:

$u(\vec{x})$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 可微,

是指 $u(\vec{x} + \vec{h}) - u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i + o(|\vec{h}|)$

$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, λ_i 是与 $\vec{h}$ 无关的实数

Cauchy-Riemann 方程 如何记忆?



在可微的情形下,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

暂缓证明上述内容, 先看怎么用:

例: $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且 $f'(z) = f(z)$.

证: $u(x, y) = e^x \cos y$ $v(x, y) = e^x \sin y$

$u(x, y)$, $v(x, y)$ 都是可微的.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



所以 Cauchy-Riemann 方程成立.

$f(z)$ 在 (x,y) 处可导

(x,y) 是任意的,

所以 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= f(z). \quad \square \end{aligned}$$

刚才例子中的 $e^x (\cos y + i \sin y)$ ($z = x + iy$)
被定义为 e^z .

这样 $(e^z)' = e^z$. 同微积分一样.

例: $f(z) = z^n$. 刚才已经算过, $f'(z) = n z^{n-1}$.

现在用 C-R 方程再算一遍:

~~如果~~ 如果直接利用 $f(z) = (x + iy)^n$
展开 找出 $u(x,y)$
 $v(x,y)$.

计算会相当复杂



考虑 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$= u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i v\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

把 $z, \bar{z}$ 视为独立的变量, 作形式上的计算:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(-\frac{1}{2i}\right)$$

$$+ i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(-\frac{1}{2i}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

若 f 在 $z = x + iy$ 处可微, 则 将 C-R 方程代入式,

$$\text{得 } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$



所以, C-R 方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

例: $f(z) = z^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0. \quad \text{所以 C-R 方程成立.}$$

f 处处可微.

$f(z) = \operatorname{Re} z$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \frac{z+\bar{z}}{2}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

所以 C-R 方程不成立.

f 处处不可微.

按同样方式, 计算

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

若 f 可微, 则由 C-R 方程, 得 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$
 $= f'(z).$



例: ~~对于~~ $f(z) = z^n$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = n z^{n-1} = f'(z).$$

例: $f(z) = |z|^2$.

是否可微?

$$f(z) = z \cdot \bar{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z$$

只有当 $z=0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

所以 f 只在 $z=0$ 处可微.

$$\text{此时 } \frac{\partial f}{\partial z} = \bar{z} = 0,$$

$$\text{所以 } f'(0) = 0.$$

