9.1 Thursday

Def：设 $z_1 \cdots z_n \cdots$ 是一列复数列，$z_0 \in \mathbb{C}$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$ 则
称 z_0 为复数列 $\{z_n\}$ 的极限 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ 或 $z_n \to z_0\ (n\to\infty)$

Rmk：上述 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$ 指数分学过的实数极限 不多解释了.

Thm：设 $z_0 = x_0+iy_0$，$z_n = x_n+iy_n$，$n\in\mathbb{N}^*$ 则
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

Pf：$|x_n-x_0| \le |z_n-z_0|$，$|y_n-y_0| \le |z_n-z_0|$
且 $|z_0-z_n| \le |x_n-x_0|+|y_n-y_0|$ 令 $n\to\infty$ 直接得到

Def：在 $\mathbb{C}$ 中引入新数 ∞ 模为 $+\infty$ 辐角、实虚部均无意义 规定
$z\in\mathbb{C}$ $z\pm\infty=\infty$ $z\ne0$ 时 $z\cdot\infty=\infty$ $\frac{\infty}{z}=\infty$ $\frac{z}{\infty}=0$ $\frac{z}{0}=\infty$
$0\cdot\infty$ 无意义 $\infty\pm\infty$ 无意义

在复平面上 有一个"理想点"与 ∞ 对应 增加 ∞ 的复平面称为闭复平面
否则称为开(复)平面 也称为扩充平面与有限平面

在闭复平面上 任意以原点为中心圆的外部称为无穷远点邻域
写作 $\{z\in\mathbb{C}: |z|>R\}\cup\{\infty\}$

对复数列 $\{z_n\}$ 若 $\forall M>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N$ $|z_n|>M$
则称 $\{z_n\}$ 收敛于 ∞ 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$

Def.(球面表示) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的球：$x^2+y^2+(z-1)^2=1$，任取平面 xOy 上
一点 P 与 $(0,0,1)$ 相连 交球 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 于一点 Q（Q 存在且唯一）
通过这种办法建立了球面上除 $(0,0,1)$ 外的点与 xOy 平面（即复平面）
上点的一一对应. 自然地约定 $(0,0,1)$ 对应到 ∞

具体说来. $P(x,y)$ 设 $z=x+iy$ 则 $Q=\left(\frac{4\operatorname{Re} z}{|z|^2+4}, \frac{4\operatorname{Im} z}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right)$

反之 对 $Q(x,y,z)$ 有 $P\left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}\right)$

Def（平面点集 区域与曲线）$z_0\in\mathbb{C}$ $\rho>0$ 则 z_0 邻域为 $\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$
记作 $B_\rho(z_0)$ $B(z_0,\rho)$

$E\subset\mathbb{R}^2$，E 的内点 外点 边界点（B2 学过了懒得写了）
开集 闭集 有界集 无界集 区域 闭域（同上）

设 $x(t), y(t)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上连续函数 则由 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ 决定的点集称为复平面上的连续曲线 也写作 $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$.

e.g. $z(t)=\cos t+i\sin t$ $t\in[0,\pi]$ (半圆)

若 ℓ 为连续曲线 $t_1\neq t_2\in[\alpha,\beta]$，当 t_1, t_2 不同时为端点时 $z(t_1)\neq z(t_2)$

则这样的曲线为简单曲线 进一步若 $z(\alpha)=z(\beta)$ 称为简单闭曲线

区域D是单连通的若D内任一简单闭曲线内部区域仍在D中（没有洞）

e.g.  单连通  非单连通（多连通）

第二章 复变函数

Def: $E\subset\mathbb{C}$ $\forall z\in E$ 按一定规律有一确定复数 w 与 z 对应 就定义了一个 E 上的单值复变函数 记作 $w=f(z)$ 或 $f: E\to\mathbb{C}$

E 为定义域 $\{f(z): z\in E\}$ 为值域

若对 $z\in E$ 对应的 w 不止一个 则称为多值复变函数

e.g. $w=g(z)=\operatorname{Arg} z$. $z\in B(0,1)\setminus\{0\}$

Def: $z_1\neq z_2\in E \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2)$ 则 f 是单射（双方单值映射）

Rmk: 一个复变函数对应于两个二元实变函数

e.g. $w=f(z)=z^2=u(x,y)+iv(x,y)=(x^2-y^2)+i(2xy)$

Def（函数的连续性）设 $w=f(x,y)=f(z)$ 在区域 $0<|z-z_0|<\rho$ 有定义

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. $0<|z-z_0|<\delta\le\rho$. $|f(z)-w_0|<\varepsilon$. 记 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$

Rmk: 实函数有关极限运算法则对复变函数也适用.

即加减乘除运算法则