

(iii) 当 $0 < R < \infty$ 时在 $B(0, R)$ 中绝对收敛在 $\{z: |z| > R\}$ 发散 任取 $z \neq 0$
 $z \in B(0, R)$ 取 ρ s.t. $|z| < \rho \leq R$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$
 $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$ 故 $\sqrt[n]{|a_n z^n|} < \frac{|z|}{\rho} \dots |a_n z^n| < (\frac{|z|}{\rho})^n < 1$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{|z|}{\rho})^n$ 收敛 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 收敛

(Weierstrass 判别法) 若 $\forall z \in E \quad |f_k(z)| \leq M_k$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ 则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$
 在 E 上绝对一致收敛

再任取 z s.t. $|z| < R$ 取 r s.t. $|z| < r < R$ 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{r}$
 故 $\exists N, \forall n > N \quad \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r}$ 故 $|a_n z^n| > (\frac{|z|}{r})^n > 1$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 发散

Thm (Abel) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛 则在 $B(0, |z_0|)$ 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 处发散 则在 $\{z: |z| > |z_0|\}$ 发散

f: 若 z_0 收敛 则 $|z_0| \leq R$ 直接得证 z_0 为散同理

Thm (逐项微分积分) 幂级数在其收敛圆内确定一解析函数
 则可逐项微分和积分 $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z-a)^{n-k}$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-a)^n dz$$

解析函数的 Taylor 展开

Thm (Taylor 展开) 设 $f \in H(B(z_0, R))$ 则 f 可以在 $B(z_0, R)$ 中展开成幂级数
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ 称为 f 在 z_0 处 Taylor 展开

注: 实函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ f 无穷次可微 (包括 0 处) 且 $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$

Q: f 在 0 处能否展开成幂级数? 若能则系数全为 0. 故不能

Pf: 任取定 $z \in B(z_0, R)$ 取 $\rho < R$ s.t. $|z-z_0| < \rho$ 记 $C_\rho = \{z: |z-z_0| = \rho\}$

由 Cauchy 积分公式有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$

$$\frac{1}{\zeta-z_0} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(\zeta) \frac{1}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta (z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n$$

只需证明求和与积分可以交换次序



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \left(\sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta \quad (*)$$

$$\left| \int_{C_p} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{M}{\rho^{n+1}} |z-z_0|^n \cdot 2\pi\rho = 2\pi M \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{\rho} \right)^n$$

$$= 2\pi M \cdot \left(1 - \frac{|z-z_0|}{\rho} \right)^{-1} |z-z_0|^m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

① 在(*)中令 $m \rightarrow \infty$ 得 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta$

解析性指可用幂级数表示在复变函数中, 全纯性与解析性等价.

Prop 1: f 在 z_0 -解析点的幂级数展开是唯一的

Prop 2: 幂级数是它的和函数在收敛圆内的 Taylor 展开

e.g. $z + 5z^3 - z^5 \quad B(0, 10)$ 它就是它自己的 Taylor 展开

Thm: f 在点 z_0 处域 D 内解析当且仅当 f 在 z_0 邻域内展开成幂级数

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

