第1章 复数和平面点集

复数的定义及运算

虚数单位 i 满足 $i^2=-1$

复数 $\underbrace{x}_{\text{实部}}+i\underbrace{y}_{\text{虚部}}$，$Z=x+iy$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$

实部 虚部

$x=\mathrm{Re}\,Z$ $\quad y=\mathrm{Im}\,Z$

(Real part) (Imaginary part)

$\mathrm{Im}\,Z=0 \Rightarrow Z\in\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}\subsetneq\mathbb{C}$

虚部为0的复数是实数

设 $Z_1=x_1+iy_1$ $\quad Z_2=x_2+iy_2$

则 $Z_1=Z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$

两个复数相等就是实部、虚部分别相等.

$Z=x+iy$ 的共轭：$\bar{Z}=x-iy$

加法 …

减法 …

乘法 $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$
$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

模 $|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

除法 $z_2\neq0$ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}}=\dfrac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}$

满足:

加法交换律 加法结合律

乘法交换律 乘法结合律

乘法对加法的分配律.

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

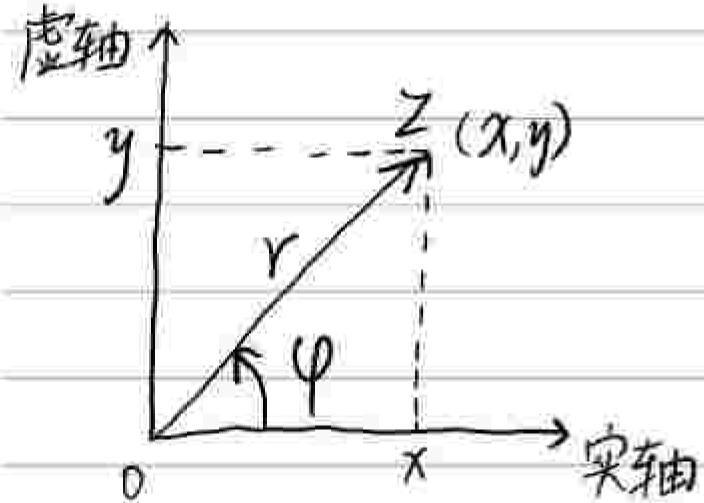
$$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 .$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

复数的几何表示.



点 $(x,y) \longleftrightarrow z=x+iy$.

$\updownarrow$

向量 $\overrightarrow{OZ}$

复平面

模 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=|\overrightarrow{OZ}|$

辐角 $\varphi=\mathrm{Arg}\, z$

(argument)

一个复数的辐角有无穷多个，相差 2π 的整数倍.

$z=0$ 时辐角无意义.

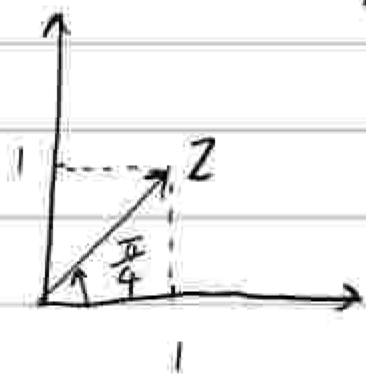
若用 $\arg z$ 表示辐角的某一确定值，则

$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi. \quad k\in\mathbb{Z}.$

例： $z=1+i$　　$|z|=\sqrt{2}$

$$\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\arg z=\frac{\pi}{4}.$$



若限定在 $-\pi<\varphi\leq\pi$ 范围内，则辐角是唯一的，常叫做辐角的主值，也记作 $\arg z$

（这个范围只要长为 2π 就行，具体在哪没有本质区别，如 $0<\varphi\leq 2\pi$，$\frac{\pi}{2}<\varphi\leq\frac{5}{2}\pi$，规定某一特定范围，只是为了统一）

三角表示

$$x = r\cos\varphi \qquad r = |z|$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

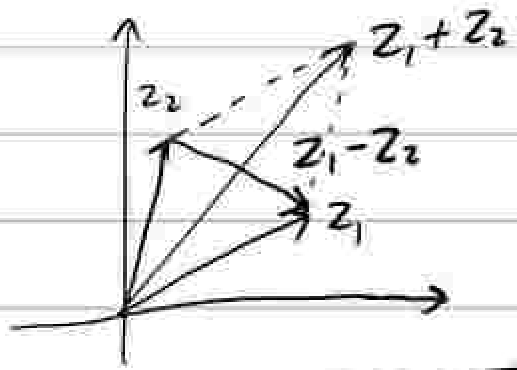
定义：
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$\varphi \in R$$

则
$$z = re^{i\varphi} \qquad r\text{是模长} \quad \varphi\text{是辐角}$$

这是复数的指数形式.

$z_1 \pm z_2$ 如同向量加法/减法

满足 平行四边形/三角形法则



一些简单的不等式：

$\mathrm{Re}\, z \le |z|$ $\qquad$ $|x| \le |z|$

$\mathrm{Im}\, z \le |z|$ $\qquad$ $|y| \le |z|$

$|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ $\qquad$ $|z| \le |x| + |y|$.

三角不等式： $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$$

设 $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

则 $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

证明: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

$$= (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

设 $n \in \mathbb{N}$, $z = re^{i\varphi}$, 则 $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

例：$(1+i)^{2022}$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^{2022} = \sqrt{2}^{2022} e^{i\,2022\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2^{1011} e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2^{1011} i$$

Z^{-n} 定义为 $\frac{1}{Z^n}$

$$Z^{-n} = r^{-n} e^{-in\varphi}.$$

de Moivre 公式：

$n \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

若 $Z \in \mathbb{C}$，$n \in \mathbb{N}$，$w^n = Z$，则称 w 为 Z 的 n 次方根. 记为 $\sqrt[n]{Z}$.

设 $w=\rho e^{i\theta}$. $z=re^{i\varphi}$

$w^n=z$

即 $\rho^n e^{in\theta}=re^{i\varphi}$

所以 $\rho^n=r$ $\rho=r^{\frac{1}{n}}$.

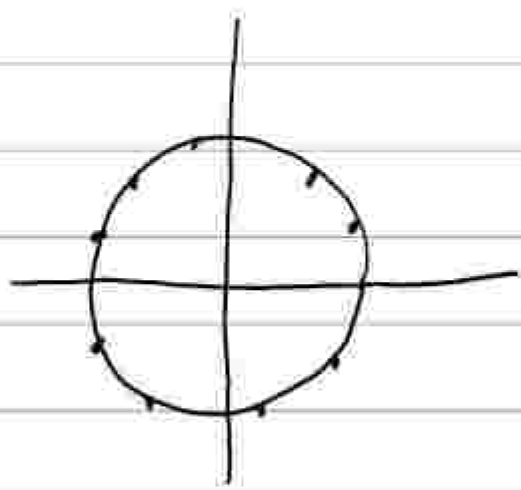
$n\theta=\varphi+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$\theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$

所以 $\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

一共有 n 个不同的值. (多值函数)

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$



将圆 n 等分.