

第三次作业提示

2022 年 9 月 19 日

第三次作业 9 月 20 日交, 有以下题目: 第二章, 11(奇数小题), 14(奇数小题). 第三章, 1, 3, 5, 7, 8, 9.

在这里给大家提示, 是希望大家能在交作业之前就把作业中的问题自己解决点, 学到东西, 少被扣分, 我们改起来也舒心。

第二章第 11 题奇数小题

判断下列极限是否存在:

- (1) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z}$
- (3) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^{1/(z-1)}}{e^z - 1}$.

(1) 注意, 现在是复变函数, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, 它可以小于零, 也可以是虚数。 z 可以沿着各种不同的路径趋向无穷。(3) 除了同 (1) 一样要注意 e^z 的定义之外, 还要记得数学分析里学过的: 函数的积或商的极限, 是极限的积或商。这一点在复变函数里也一样。

第二章第 14 题奇数小题

求下列函数的解析区域, 并求出微商:

- (1) $\frac{1}{1 + e^z}$
- (3) $z \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$

不要再写 C-R 方程了, 基本初等函数的导数可以当作结论直接用, 函数的四则运算和复合的求导法则也可以直接用。

这题，你真正需要做的事情是把分母为 0 的点找到，它们不在函数的定义域内。

第三章第 1 题

计算积分 $\int_C \frac{2z-3}{z} dz$, 其中 C 为:

- (1) 从 $z = -2$ 到 $z = 2$ 沿圆周 $|z| = 2$ 的上半圆
- (2) 从 $z = -2$ 到 $z = 2$ 沿圆周 $|z| = 2$ 的下半圆
- (3) 圆周 $|z| = 2$ 的正向.

令 $z = 2e^{i\theta}$, 注意积分上下限的顺序对应着曲线绕行的方向, 不要把正负号搞错了。

第三章第 3 题

利用积分估值, 证明:

- (1) $\left| \int_{-i}^i (x^2 + iy^2) dz \right| \leq 2$, 积分路线是直线段
 - (2) $\left| \int_{-i}^i (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi$, 积分路线是圆周 $|z| = 1$ 的右半.
- 长大不等式。

第三章第 5 题

计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz$, 并由此证明

$$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

为计算 $\int_{|z|=1} \frac{1}{z+2} dz$, 看看能不能用柯西积分定理。

令 $z = e^{i\theta}$, 转化为后面的 $\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$

考虑到这是个偶函数, 所以 $\int_{-\pi}^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 2 \int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$.

或者计算 $\int_C \frac{1}{z+2} dz$, C 是上半圆。直接找原函数 $\ln(z+2)$, 看看能不能用牛顿莱布尼茨公式。

第三章第 7 题

设 $f(z)$ 在域 $D: |z| > R_0, 0 \leq \arg z \leq \alpha, 0 < \alpha \leq 2\pi$ 内连续, 且存在极限

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A.$$

设 C_R 是位于 D 内的圆弧 $|z| = R$, 试证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = iA\alpha.$$

把条件和结论的 $\varepsilon - M$ 语言定义写出来。

注意到 $\int_{C_R} \frac{A}{z} dz = iA\alpha$

所以你要证的实际上就是

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{zf(z) - A}{z} dz = 0.$$

第三章第 8 题

若多项式 $Q(z)$ 比多项式 $P(z)$ 高二次, 试证

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

把 $P(z)$, $Q(z)$ 的具体形式设出来, 试着通过代数变形以及三角不等式, 以及 $R \rightarrow \infty$ 的设定, 把分母上的高出来的 z^2 凸显出来。

再加一点提示:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right)$$

当 $|z|$ 充分大时,

$$\frac{1}{2} < \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| < 2$$

最后用长大不等式。

第三章第 9 题

求积分 $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, 并证明 $\int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi$.

为计算积分, 看看能不能用柯西积分公式。后面的证明和第 5 题一个思路。