

2.11. 语言表述的问题. 有同学(3)中写 $\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z-1}} - 1} = \infty$
~~虽然有2个问题~~ 虽然不是大问题但也请注意
 首先 1^+ 是针对实数取极限的语言, 复数中趋近
 方向不止两种. 要说清楚是具体如何趋近的.
 如沿 x 轴方向从右侧趋近于1.
 或者转化为实函数即 $\frac{(x+yi)e^{\frac{1}{x+yi-1}}}{e^{\frac{1}{x+yi-1}} - 1}$ 然后用多变量语言
 $\lim_{\substack{y=0 \\ x \rightarrow 1^+}} \frac{(x+yi)e^{\frac{1}{x+yi-1}}}{e^{\frac{1}{x+yi-1}} - 1}$ 比较严谨.
 其次 ∞ 不是一个数 不能说 $\lim_{\substack{y=0 \\ x \rightarrow 1^+}} \frac{(x+yi)e^{\frac{1}{x+yi-1}}}{e^{\frac{1}{x+yi-1}} - 1} = \infty$ 这段删去.
 只能说这个极限不存在 或者说
 沿 x 轴方向从右侧趋近于1时 $\frac{(x+yi)e^{\frac{1}{x+yi-1}}}{e^{\frac{1}{x+yi-1}} - 1} \rightarrow \infty$ 或 $\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z-1}} - 1} \rightarrow \infty$
 提一下扩充数域

2.14. 有些同学认为 $e^z + i \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ 只能说
 我们的思路该革新一下

3.7 ①提示中的做法 写一下 $\varepsilon-N$ 语言 要证 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{zf(z)-A}{z} dz = 0$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ 当 $|z| > M$ 时 $|zf(z)-A| < \varepsilon/\alpha$
 从而当 $R > M$ 时 $|\int_{C_R} \frac{zf(z)-A}{z} dz| \leq \int_{C_R} \frac{|zf(z)-A|}{|z|} |dz|$
 注意 $\rightarrow$ ML 估计 $\leq R \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \alpha \varepsilon / \alpha = \varepsilon$ 所以 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{zf(z)-A}{z} dz = 0$

为什么能看出 $\int_{C_R} \frac{A}{z} dz = iA\alpha$ 呢?

首先是因为题目中给出了关于函数 $zf(z)$ 的性质. 在对
 $\int_{C_R} f(z) dz$ 处理时应将 $f(z)$ 视为 $\frac{zf(z)}{z}$ 来处理.



其次, 我们尝试用更高观点来看, 先回忆 Taylor 展开, 复变函数中有没有呢? 有的. 复变函数中我们有更高级的 Laurent 展开. 大家翻开课本 83 页看看. 我注意到有同学在 3.8 题中提到了“无穷大的阶”的概念, 将实数分中的知识应用到复变中非常好. 事实上, 这个题按照“阶”来理解, 就说了, 一件这样的事: 因为 $f(z)$ 与 $\frac{1}{z}$ 阶相同, 所以在无穷远处积分相同.

至于如何将这一思想表述为数学语言呢, 可以用级数. 先假设 $f(z)$ 可以在 $z=0$ 展开 (等学到了大学就知道为什么了).

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad f(z)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n+1} + a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$
 在 $z \rightarrow \infty$ 时, 第一部分趋于 0, 不管了; 第三部分中每一项都趋于无穷, 所以必须要求 $a_n = 0 (n \geq 0)$, 然后就得到 $a_{-1} = A$.

此时有 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n + \frac{A}{z}$ 易知 $n \leq -2$ 时 $\int_{C_R} a_n z^n dz = 0$

所以 $\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \frac{A}{z} dz = iA\alpha$.

但是我整个过程是不严格的, 不能当作业交上来, 只能提供一个直观, 可以猜猜看具体是哪一步不那么完整.

最后, 介绍一个我自己喜欢用的方法. 我看到有些同学非常期望将极限号与积分号交换顺序, 但要懂怎么换. 这个极限号积分号换序的方法应该没有一个人做对.

首先明确: 复变量积分相当于多变量积分, 无法换序. 况且

令 $R \rightarrow \infty$ 时, 变的是积分路径 C_R , 并无法先求极限.

所以我们要将第二型曲线积分化为第一型, 方法是极坐标换元.

$\oint_{C_R} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$. 这样积分路径就确定了.



现在可以换序了. $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\alpha f(Re^{i\theta}) i Re^{i\theta} d\theta = i \int_0^\alpha \lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta$
 $= i \int_0^\alpha A d\theta = iA\alpha$. 用极坐标换元成功凑配出

$f(z)z$ 的形式从而使用了条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = A$ 做出答案
等等! 这里为什么可以换序? 需要证明一致收敛. 对谁一致?
对 θ 一致! 要证 $f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}$ 在 $R \rightarrow \infty$ 时一致收敛到 A .

即证 $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ 当 $R > M$ 时 $|f(Re^{i\theta})Re^{i\theta} - A| < \varepsilon$ 对 $\forall \theta \in [0, \alpha]$
都成立. 事实上复极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = A$ 已经自动给出这个一致性
因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z = A$ 所以 $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ 当 $|z| > M$ 时 $|f(z)z - A| < \varepsilon$
即只要 z 满足 $|z| > M$, 不论 z 辐角是什么 $|f(z)z - A| < \varepsilon$ 都成立
这不就是之前我们想要的关于 θ 的一致性么?

3.8. 首先, 其实这道题最简单做法还是直接用 3.7 结论. 只需要
证明 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$. 这并不难但大家没怎么想到哦
其次我们可以说, 说这道题本质是什么. 本质就是多项式的
次数中最高包含着多项式无穷大的阶!

3.7, 3.8 两道题暗示一个很重要的事, 就是 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ 并不能
推出 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} f(z) dz = 0$. (例如: $f(z) = \frac{1}{z}$) 这其实还是因为
在令 $R \rightarrow \infty$ 时不仅函数的自变量在趋于无穷, 围道也在趋于无穷
用 ML 不等式 $|\int_{|z|=R} f(z) dz| \leq 2\pi R \max_{|z|=R} |f(z)|$ 这里不仅要求
 f 是普通无穷小, 还要求在乘以围道趋于无穷带来的修正后
还是无穷小. 也就是说, 至少和 $\frac{1}{z}$ 是同阶的无穷小.
再看回多项式, 能发现决定多项式的无穷大阶数的是最高
次项. 其余项在无穷大过程中不起作用. 考虑用不等式放缩.



这就是提示中把 $a_n z^n$ 提出来的原因 至于有人问为什么

$$\frac{1}{2} < \left| 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| < 2$$

这是因为其极限为1

所以当 n 充分大时它会和1很接近, 也就是和1的距离小于 $\frac{1}{2}$
即在 $\frac{1}{2}$ 和 2 之间

~~我们还有一个求法求最高次项就是带余除法~~ 没有这个办法

补充知识:

回忆最大模原理: 设 f 为域 D 中非常数的全纯函数

那么 $|f(z)|$ 不可能在 D 中取到最大值

第二表述: 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中有界域, 如果非常数的函数 f 在 D 上连续
在 D 内全纯 那么 f 的最大模在 D 边界上而且只在边界上达到

代数基本定理: 复系数多项式 $f(z)$, 次数为 n , 则有 n 个根.

证明: 若 $f(z)$ 没有根 则 $\frac{1}{f(z)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上全纯函数:

因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ 所以 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$. 易知 $\exists R > 0$

当 $|z| > R$ 时 $|\frac{1}{f(z)}| < |\frac{1}{2f(0)}|$. 又因为 $\frac{1}{f(z)}$ 是 $B(0, R)$ 上非常数

全纯函数且在 $B(0, R)$ 上连续由最大模原理: $\frac{1}{f}$ 最大模

只在边界上达到, 即存在 $z_0, |z_0| = R$, 且 $\forall z \in B(0, R) \quad |\frac{1}{f(z)}| < |\frac{1}{f(z_0)}|$

从而 $|\frac{1}{f(0)}| < |\frac{1}{f(z_0)}| < |\frac{1}{2f(0)}|$ 因为 $f(0) \neq 0$ 导出矛盾!

$f(z)$ 至少有一个根 z_0 从而 $f(z) = (z - z_0)g(z)$ 对 $g(z)$ 做同样讨论

可知 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个根 (含重根)

由代数基本定理任一多项式 $f(z)$ 可分解为 $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$

$z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 f 的根 而对于实系数多项式 这个分解有更好性质

我们先证明实系数多项式的虚根成对



对实系数多项式 $f(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i$ 的一个根 z_0 . $\bar{z}_0$ 也是 f 的一个根.
这是因为 $f(\bar{z}_0) = \sum_{i=1}^n a_i (\bar{z}_0)^i = \sum_{i=1}^n a_i \bar{z}_0^i = \sum_{i=1}^n \overline{a_i z_0^i} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i z_0^i} = \overline{f(z_0)} = \overline{0} = 0$

现在设 $f(z)$ 所有根为 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 我们开始分解 f .

首先不妨设 $z_1, z_2, \dots, z_k$ 是复数根, 而 $z_{k+1}, \dots, z_n$ 是实数根.

再不妨设 $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots$ 是成对的共轭复数.

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(z) &= \prod_{i=1}^n (z - z_i) = \prod_{i=1}^k (z - z_{2i-1}) \prod_{i=1}^k (z - z_{2i}) \prod_{i=k+1}^n (z - z_i) = \prod_{i=1}^{k/2} (z - z_{2i-1})(z - z_{2i}) \prod_{i=k+1}^n (z - z_i) \\ &= \prod_{i=1}^{k/2} (z^2 - (z_{2i-1} + z_{2i})z + z_{2i-1}z_{2i}) \prod_{i=k+1}^n (z - z_i) \end{aligned}$$

现在 $\forall 1 \leq i \leq \frac{k}{2} (z^2 - (z_{2i-1} + z_{2i})z + z_{2i-1}z_{2i})$ 是实系数多项式.

$\forall k+1 \leq i \leq n (z - z_i)$ 是实系数多项式.

从而证明了今天的大定理: $\mathbb{R}$ 上的多项式 $f(x)$ 可分解为一次和

二次多项式的乘积. ✓

注意, 该定理表述中不包含复数.

