

第二次作业-第二章习题

2022 年 9 月 19 日

答案

第 1 题的偶数小题

函数 $w = \frac{1}{z}$ 把 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线?

(2) $y = 0$

(4) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $w = \frac{1}{x}$, 所以是去掉 0 的实轴。注意! 去掉 0。

(4) 原来是 $|z| = 2$, 所以 $w = \frac{1}{z}$ 映过去是 $|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$, 是 w 平面上的半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆。

第 3 题

设

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

试证 $f(z)$ 在 $z = 0$ 不连续.

这题在数学分析里就有。做法就是:

证明.

$$\lim_{z \rightarrow 0, y=kx} f(z) = \frac{k}{1+k^2}$$

与 k 有关, 所以极限

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

不存在, 所以 f 在 $z=0$ 不连续。□

这是推荐的、规范的写法。这题所有人都做对了, 但是写法多有不规范。

第 5 题奇数小题

证明下列函数在 z 平面处处不可导:

(1) $f(z) = |z|$

(3) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

(1) 写出实部、虚部: $u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = 0$, 计算偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

要使得 $C-R$ 方程成立, 只能是 $x = y = 0$ 。

或者说, 除了 $z=0$ 之外, 复平面上所有其它的点, 都不满足 $C-R$ 方程, 因此 f 在那里不可导。

现在问题来了: $z=0$ 这里到底是什么情况?

正确的做法有两种:

第一种

用导数的定义, 计算 f 在 $z=0$ 处的导数:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$$

这个极限不存在, 因为沿着实轴和沿着虚轴趋向于零时的极限值不同。所以 f 在 $z=0$ 处也不可导。

第二种

$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 不是实可微的, 所以 f 在 $z = 0$ 不可导。

这里涉及到一些概念的辨析 (实可微、复可微、可导等等), 我们在讲义的最后再详细说。

错误的做法:

错误 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

这个极限不存在, 所以 u 在 $(0, 0)$ 处不可导, 所以 f 在 $z = 0$ 处不可导。

错误在于: 算的这是什么玩意? 谁让你算导数的极限了? 导数的极限不存在, 跟导数存不存在没有关系!!

错误 2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$(x, y) = (0, 0)$ 时分母为 0, 所以不管了。所以 f 在全平面不可导。

错误在于: ??? 谁允许你可以不管 $(x, y) = (0, 0)$? ?? f 在 $z = 0$ 处明明有定义, 既然有定义, 你就应该考虑 f 在这里的导数。你算出来

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在 $z = 0$ 处没有意义, 能说明什么? 什么也说明不了, 只

能说明这个式子 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在 $z = 0$ 处没有意义, 这个式子失效了,

没用了, 它甚至连 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 $z = 0$ 处存在还是不存在都无法说明!!

错误 3

只看了一个 $C - R$ 方程: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 就由此得到结论:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

错误在于: 你也太偷懒了吧。 $C - R$ 方程有两个好吗? 这第一个 $C - R$ 方程在 $x = 0$ 时明显是成立的, 你怎么就敢写 $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$? How dare you!!

(3) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. 这题几乎所有人都做对了。

正确做法一

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{(\bar{z})^2} \neq 0$$

所以 f 在全平面不可导。

正确做法二

写出两个 $C - R$ 方程, 发现无处成立, 所以 f 在全平面不可导。

请注意: 这题和上题的不同之处在于: 这题你确实不用管 $z = 0$, 因为它就不在定义域内。

错误

和上面一样, 有的同学只看了一个 $C - R$ 方程, 竟然胆敢说它不成立。请你再算算看, 第一个 $C - R$ 方程在 $x = \pm y$ 时成立, 第二个 $C - R$ 方程在 $xy = 0$ 时成立。只写一个 $C - R$ 方程就得到结论也太偷懒了吧!

最后, 这两道题都有一小部分同学直接按导数的定义 (即差商的极限) 来说明导数不存在。想法很好, 可是请你把极限不存在的理由讲清楚, 不要糊弄助教, 糊弄自己。

第 6 题偶数小题

求下列函数的解析区域:

$$(2) f(z) = \begin{cases} |z|z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

这题属于是几乎全军覆没，大家做题还是太草率了。

首先，复习一下解析的概念：

定义. 函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，是指存在 z_0 的一个邻域（理解成一个以 z_0 为圆心的小圆盘就好了），在这个邻域内的每一点处， $f(z)$ 都是可导的、

好了，现在有了这个概念在心中，我们再来做题。

首先看看 $|z| > 1$ 的部分， $f(z) = z^2$ ，这一看就是处处可导的（导数为 $2z$ ），而且 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ 是一个开集，所以在这里的每一个点 z_0 都有一个小圆盘完整地落在里面，所以 f 在 $|z| > 1$ 里面每一个点上都是解析的。

再看看 $0 < |z| < 1$ 是什么情况。很简单，按 $C-R$ 方程（这里 $u = \sqrt{x^2 + y^2}x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}y$ ）， f 在这里不是可导的，所以不是解析的。

最后是许许多多翻车的两个地方： $z = 0$ 和 $|z| = 1$ 。

首先来说说 $z = 0$ 。令人惊讶的是， f 在这里是可导的，尽管 f 在它周围的每个点都不可导！！因为，按定义，

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z|z|}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0$$

很多人直接就写了：当 $|z| < 1$ 时， $C-R$ 方程不成立，所以 f 不可导。很奇怪，对吧？

看上去在 $z = 0$ 这里 $C-R$ 方程是没有意义的，因为分母为 0：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

可是, 为什么 f 在 $z = 0$ 还是可导的?

$z = 0$ 这里到底怎么了?

其实事情是这样的: 在 $z = 0$ 这里, 上面计算偏导数的式子失去意义, 需要用定义来计算偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

其他几个偏导数类似也是 0。

实际上, 不仅偏导数存在, u, v 在这里也是实可微的。所以 f 在这里可导, 导数为 0。

在这里就得提醒大家, 不要总是想着套公式算算算算算, 算之前想想自己在干什么, 算的到底是什么东西, 为什么可以这样算。不然, 算到头来无法解释自己算的结果。

最后是 $|z| = 1$ 。有人说在这里 f 不连续。这个观察很好, 基本上是对的, 但是很遗憾, 还是有一点瑕疵: f 在 $z = 1$ 这里是连续的, 除此之外才是在 $|z| = 1$ 上不连续。

绝大多数人都写: 当 $|z| \geq 1$ 时, 因为 $f(z) = z^2$, 所以 $f'(z) = 2z$ 。这是错的。

在 $|z| = 1$ 时, 不能这么算导数! 为什么呢? 看看导数的定义:

定义.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

这个极限, 是 $z \rightarrow z_0$, 是从 z_0 的各个方向 (上下左右四面八方) 趋向于 z_0 。

所以, f 在 $|z| = 1$ 上面的导数, 既和 f 在 $|z| \geq 1$ 上面的取值有关, 也和 f 在 $|z| < 1$ 上的取值有关。

这就好比微积分里学的分段函数一样: 比如说 $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x^3, & x \geq 1. \end{cases}$

它在 $x = 1$ 处的导数是多少? 是 3 吗? 是 2 吗? 都不是, 不存在。

现在你明白, $|z| = 1$ 上面, f 的导数不好算了把。

不过, 这题也没问你 $|z| = 1$ 上面的导数到底是多少, 我们甚至不需要考虑这个问题。题目问的是 f 的解析区域。

我们现在知道： f 在 $0 < |z| < 1$ 时不可导，在 $|z| > 1$ 时可导，所以根据上面复习到的解析的定义，我们知道， f 的解析区域就是 $|z| > 1$ ，不用考虑 f 在 $z = 0$ 以及在 $|z| = 1$ 上到底是不是可导的。因为“解析”的定义说的是在该点的邻域内都可导。既然你已经知道在 $0 < |z| < 1$ 上都不可导，那么包括 $z = 0$ 和 $|z| = 1$ 在内， f 在整个 $|z| \leq 1$ 中每个点处，就都不可能是解析的。

第 7 题偶数小题

利用 C-R 方程, 证明下列函数在全平面上解析, 并求出其导数:

(2) $e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$

这个太简单了，没有坑，没有技巧，就硬算。所以不写答案了，应该没人算错。不过有的同学只是用 $C - R$ 方程证明它在全平面解析，忘记求导了。请审题呀！

第 8 题偶数小题

证明区域 D 内满足下列条件之一的解析函数必为常数:

(2) $\overline{f(z)}$ 解析

(4) $\operatorname{Im} f(z) = \text{常数}$

(6) $\arg f(z) = \text{常数}$.

这题也很简单，尤其是 (2)(4)，没人错，都做得很好。第 (6) 个，请注意， $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，辐角是常数，所以你就设 $\frac{v}{u} = k$ 为常数。为什么不讨论一下 $u = 0$ 的情况呢？

如果不想这样讨论，你也可以设 $u(x, y) = ar(x, y)$, $v(x, y) = br(x, y)$ ，这里 a, b 是两个实常数， $r(x, y)$ 是一个实函数。

第 9 题

证明在极坐标下, C-R 方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

并验证函数 $f(z) = z^n$ 及 $\ln z = \ln r + i\theta, z = re^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi$, 满足 C-R 方程.

同学，能否请你好好审审题？这题有 3 问，为什么只做一问或者两问呢？

先说一个

非常离谱的错误

有人这么写 $f(z) = re^{i\theta}$ ，所以 $u(r, \theta) = r \cos \theta$, $v(r, \theta) = r \sin \theta$ 。

???

这个题里面的 r, θ 指的是自变量 z 的模和辐角。

复变函数 $f(z)$ ，是把复数映射为复数， z 有 z 的模和辐角， $f(z)$ 有 $f(z)$ 的模和辐角。

接着说说

“回去复习数学分析”类型的错误

有多少同学以为 $\frac{\partial x}{\partial r}$ 与 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 互为倒数？

单变量函数是这样的， $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 。

但现在是 (x, y) 与 (r, θ) 的对应，正确的关系是：

$$\begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \partial r / \partial x & \partial r / \partial y \\ \partial \theta / \partial x & \partial \theta / \partial y \end{pmatrix} \text{ 互为逆矩阵。}$$

$\frac{\partial x}{\partial r}$ 与 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 并不是互为倒数的。

实际上： $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$ ，而 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta$ 。

还有同学写： $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r}$ ，请回去好好复习一下多变量函数复合求导

的链式法则！正确的是： $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$

第 10 题奇数小题

求下列函数的解析区域，并求出其微商：

$$(1) \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

首先做因式分解： $\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

所以分母为 0 当且仅当 $z = 1$ 或 $z = 2$ ，除此之外函数处处有定义，处处可导，所以在除了这两点之外的整个复平面上都是解析的。

微商就是导数，像实函数一样求就行： $f'(z) = -\frac{2z-3}{(z^2-3z+2)^2}$ 。

之所以可以这样做，是因为基本初等函数的导数，按照定义以及按照 $C-R$ 方程我们已经算过了，书上都有，可以当结论直接用：

$$(C)' = 0$$

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

而函数的四则运算和复合的求导法则和实函数也是一模一样的。

以后这样的题就不要再使用 $C-R$ 方程了。（不是不能用，是没必要）

现在题目说完了，来说说一些容易出错的、混淆的东西。

澄清一些概念和做法

要点 1. 可导和可微到底是什么关系？

单变量函数的可导性和可微性是等价的。多变量函数的可微性更强一些，能推出可导性（指可求偏导）；反过来，可导性（指可求偏导）不能推出可微性。 $f(z)$ 视为 z 的函数，是单变量函数，可导性和可微性是一致的。如果视为 $f(x, y)$ ，那么就是多变量函数，可导和可微就不一样。

这里我们需要回顾一下数学分析，在那里已经反复强调了可导和可微的关系。

首先回顾定义：

定义. 单变量函数的导数: 如果差商的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 就说 f 在 x_0 处可导, 导数就是这个极限。

请注意, 形式上看, 单个实变量 x 的函数 $f(x)$, 和单个复变量 z 的函数 $f(z)$, 它们的导数的定义没有区别。

定义. 多变量函数的偏导数: 这里就随手写 4 个变量吧。如果差商的极限

$$\lim_{c \rightarrow c_0} \frac{f(a, b, c, d) - f(a_0, b_0, c_0, d_0)}{c - c_0}$$

存在, 就说 f 在 (a_0, b_0, c_0, d_0) 处关于 c 可求偏导, 这个极限就叫 f 在这一点处的偏导数。

类似地, 关于 a, b, d 的偏导数也是一样定义。大家应该能举一反三。

单变量函数的可微的定义, 和多变量函数可微的定义没什么区别, 都是一句话:

定义. 如果函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处能被一个线性映射 (在相差一阶小量的误差范围内) 逼近, 就说 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 这个线性映射就叫 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处的微分。

这里我用了粗体 $\mathbf{f}$ 和粗体 $\mathbf{x}$, 就是想强调: 这里的自变量和因变量是什么都行, 不管是实数值、复数值、实向量还是复向量。

当然, 我们还是得解释一下里面的各个名词, 什么叫线性映射, 什么叫逼近, 什么叫相差一阶小量。

线性映射是线性代数里面的概念, 逼近、一阶小量都是数学分析里的概念。

在这里我们只是想解释一下可微、微分的概念, 所以用不到一般的线性映射的概念, 大家只要看看例子就行了:

$$y_1 = 2a + 3b + 5c + 6d$$

$$y_2 = 3b + 4d$$

$$y_3 = -3a - 2c + d$$

, 它相应于矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

这就是 $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ 映射到 $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ 的一个例子。当然, 让这里 (a, b, c, d) 取复数值也是可以的 (我的意思是, 这里 a, b, c, d 每一个都是一个独立的复数变量), 那么你也可以说这是一个 $\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ 的映射。

简单一些的例子:

$$y = 2x_1 + 7x_2$$

好吧, 这也是个线性映射, 是 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 映射到 $y \in \mathbb{R}$ 的一个例子。如果你认为这里 x_1, x_2 是在 $\mathbb{R}$ 中取值, 那么这就是 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 的线性映射。如果你认为这里 x_1, x_2 是在 $\mathbb{C}$ 中取值, 那么这就是 $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 的线性映射。

更简单的例子:

$$y = 2x$$

好吧, 这也是个线性映射, 是 $x \in \mathbb{R}$ 映射到 $y \in \mathbb{R}$ 的一个例子。如果你认为这里 x 是在 $\mathbb{R}$ 中取值, 那么这就是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的线性映射。如果你认为这里 x 是在 $\mathbb{C}$ 中取值, 那么这就是 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的线性映射。

线性映射的严格定义在这里我们用不到, 就不带大家回顾了, 我想大家应该不至于彻底忘掉《线性代数》。

所以, 大家看到, 线性映射是一类很简单的函数, 而我们在数学分析、复变函数里面遇到的函数, 比如 e^x 、 $\sin z$ 、 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 之类的, 并不是线性映射。

“微分”的定义, 上面讲了, 就是拿线性映射去逼近别的函数。

比如说, 最简单的: $f(x) = x^2$ 是一个函数, 它不是线性的, 因为一般来说 $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$, $f(\lambda x) \neq \lambda f(x)$ 。

但是, 我们如果只考察 $x = 1$ 这个点附近 $f(x)$ 的性质, 会发现: $f(x) = x^2$, 与 $2x - 1$ 很接近。算算看:

x	0.9	0.95	1	1.05	1.1
x^2	0.81	0.9025	1	1.1025	1.21
$2x - 1$	0.8	0.9	1	1.1	1.2

这里我们是用了怎么样一个线性映射? 逼近的是谁? 我们说得清楚些:

当 $|h|$ 充分小时, $f(1+h) - f(1)$ 被线性映射 $2h$ 逼近。

这里的逼近是至少一阶的, 是说误差 $(f(1+h) - f(1) - 2h)$ 是 $|h|$ 的至少一阶无穷小量。即:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) - 2h}{|h|} = 0$$

或者记作:

$$f(1+h) - f(1) - 2h = o(|h|)$$

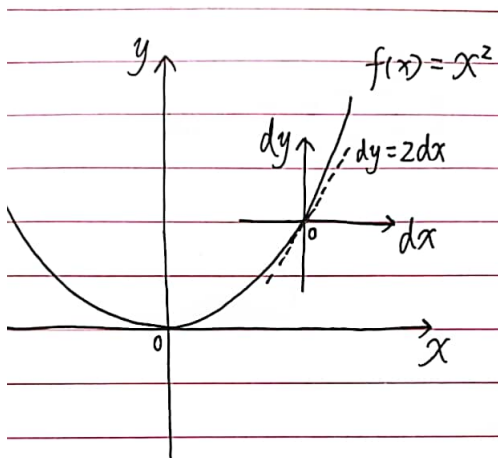
这就叫可微。

看看这里的极限式子, 和导数的定义没有区别! 所以, 对于单变量函数来说, 可微和可导没有区别, 这里 $2h$ 系数 2 就是 f 在 $x = 1$ 的导数。这里咱们也不用区分 x 到底是实数还是复数。

x	$1 - 0.1i$	$1 - 0.05i$	1	$1 + 0.05i$	$1 + 0.1i$
x^2	$0.99 - 0.2i$	$0.9975 - 0.1i$	1	$0.9975 + 0.1i$	$0.99 + 0.2i$
$2x - 1$	$1 - 0.2i$	$1 - 0.1i$	1	$1 + 0.1i$	$1 + 0.2i$

不论是 $f(x)$ (实数作变量) 也好, $f(z)$ (复数作自变量) 也好, 只要是单变量, 那么可微和可导就没有区别。

刚才我们写的是 $f(1+h) - f(1) = 2h + o(|h|)$, 现在我们把 h 写成 dx , $2h$ 就变成 $2dx$, 这就是我们原来熟悉的微分的记号。这时就说: $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的微分是 $df = 2dx$, 我们还是画个图看看吧: (图里写成了 dy ,



你理解意思就行了)。

在图中，我在 $x = 1, y = 1$ 那里又画了一个局部坐标系，在那个局部坐标系中， dy, dx 是两个坐标轴，那条虚线代表线性映射： $dy = 2dx$ 。

这就是对微分这个概念的正确理解。它代表的是：一个函数，在局部坐标系中被一个线性映射逼近，这个线性映射就叫函数在这一点处的微分。

图画的是实函数的情形，复变函数的我画不出来，但是思想是一样的，只不过那里的局部坐标系的两个坐标都是复数——一个自变量，一个因变量，都是复数。

现在我们看看多变量的情况：

考虑 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，我们考虑在 $(1, 1)$ 这个点处， $f(x, y)$ 的微分。

我们已经很熟悉了： $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} dy$ 。

想象一下三维坐标系 $O - xyz$ 中 $z = f(x, y)$ 代表了一个曲面（其实是个圆锥），在 $x = 1, y = 1, z = \sqrt{2}$ 这一点处，这个圆锥有个切平面。

如果把 $x = 1, y = 1, z = \sqrt{2}$ 这一点当成新的坐标原点处建立一个坐标系，三个坐标轴记作 dx, dy, dz ，那么那个切平面的方程就是 $dz = \frac{1}{\sqrt{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} dy$ ，这就是在局部 $((x, y) = (1, 1)$ 附近) 来逼近 $f(x, y) - f(1, 1)$ 的线性映射。

严格地写就是：

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) - f(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 + o(|\mathbf{h}|)$$

这里的 $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ 。或者写成：

$$\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{f(1 + h_1, 1 + h_2) - f(1, 1) - (\frac{1}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2)}{|\mathbf{h}|} = 0$$

以上就是 $f(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 这一点处的微分是 $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} dy$ 的直观含义和精确含义。

由上面这个极限，你很容易看到，如果可微，则必定可导（指可求偏导）。你只要把这个极限和偏导数的定义比较一下就知道了。

最后，让我们来看看，可以求偏导却不可微的例子。

在单变量的情形是不会出现可导却不可微的，因为用来定义导数的那个差商极限和用来定义微分的那个极限是一模一样的。（不论变量是实数还是复数）

在多变量的情形下，用来定义偏导数的那个差商极限，和用来定义微分的那个极限就不大一样了，后者的存在能推导出前者的存在，而且，微分（作为线性映射）里面的系数就是各个偏导数。但是反过来，偏导存在，不能导致可微。看例子吧：

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

这个函数在 $(0, 0)$ 这一点处的偏导数，按定义是

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0\end{aligned}$$

但是它在 $(0, 0)$ 处不可微，因为假如它可微，那么它的微分是 $df = 0dx + 0dy$ ，下述极限应该存在：

$$\begin{aligned}& \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - (0h_1 + 0h_2)}{|\mathbf{h}|} \\ &= \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - (0h_1 + 0h_2)}{|\mathbf{h}|} \\ &= \lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\end{aligned}$$

然而这个极限不存在，所以假设不成立。它在 $(0, 0)$ 处不可微。

为什么会这样呢？大家从例子中就可以看到，偏导只是两个方向（沿着 x, y 轴的方向）的极限，然而可微性要求更强一些。

但是，这个“方向”的说法，大家千万不要局限于实数轴，不要把一个方向就当成一根平面上的直线，这里的方向实际上是指线性空间里的一维子空间。 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间是 1 维的，作为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间是 2 维的。如此你才能理解：为什么 $f(z)$ 作为一个复变量的函数，好像是定义在二维平面上的，它的可导性和可微性却是一样的。

其实，进一步想想，对复数来说是一维的，对实数来说就是二维的。所以说，如果 $f(z)$ 是可导的，那么 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 作为实变量的二元函数就是可微的，从而可偏导。不仅如此， $C-R$ 方程还告诉我们，这几个偏导数之间有关系。

现在我们来总结一下：

- 可导（不论是单变量函数的导数，还是多变量函数的偏导数），就是差商的极限存在。
- 可微，就是在局部坐标系中可用线性映射逼近，逼近至少是一阶的，也就是误差与局部坐标的模长之比的极限为 0。
- 可微一定可导，不论是单变量还是多变量，实数还是复数。
- 如果可微，则微分作为一个线性映射，其系数就是各个偏导数。
- 单变量函数，不论是实数作自变量 $f(x)$ ，还是复数作自变量 $f(z)$ ，只要变量只有一个，那么可导性和可微性就是一回事。
- 多变量函数，可偏导未必可微，上面就是反例。
- 若 $f(z)$ 可导，则 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 可微，从而可偏导，而且几个偏导数之间满足 $C-R$ 方程。

要点 2. 解析性：这个概念我们在复变函数里新接触到的概念，它是说：

定义. 函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，是指存在 z_0 的一个邻域（理解成一个以 z_0 为圆心的小圆盘就好了），在这个邻域内的每一点处， $f(z)$ 都是可导的、

上面已经在题目中见到这个概念了。

要点 3. 到底能不能用 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 来判断可导性？

我建议不要用。

因为， z 与 $\bar{z}$ 本来就不是独立的两个变量， $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 的含义实在是很不明确。

比如说： $f(z) = |z|$ ，看上去表达式中没有含 $\bar{z}$ ，那我是不是可以说

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0? \text{ 为啥非要写成 } f(z) = \sqrt{z\bar{z}} \text{ 然后说 } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{\bar{z}}}? \text{ }$$

给大家一些更好的替代方案：

定理 1. $C-R$ 方程的等价表述之一:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

当 $f(z)$ 可导时, 导数是 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$.

$C-R$ 方程的等价表述之二:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = ir \frac{\partial f}{\partial r}$$

当 $f(z)$ 可导时, 导数是 $f'(z) = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta}$

证明. 与 $C-R$ 方程的等价性很容易验证, 这就不算了。

如果 $f(z)$ 可导, 则通过 $z = x + iy$ 将 f 视为 x, y 的二元函数, 或者通过 $z = re^{i\theta}$ 将 f 视为 r, θ 的二元函数, 则 $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)$, 其他的类似计算, 得到上述求导公式. $\square$

请大家在判断函数的可导性以及计算导数的时候, 选用合适的方法: 基本初等函数的导数直接当作结论用, $C-R$ 方程, 导数的定义, 函数四则运算、复合和反函数的求导法则。

不要拘泥于定法。