

答案

第 1 题的偶数小题

$$(2) (x - i\sqrt{y})(-x - 2i\sqrt{y}) = -x^2 - ix\sqrt{y} - 2y$$

$$(4) \frac{5i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i} = -\sqrt{3} + \sqrt{2}i$$

这题非常基本，不多讲了。

第 2 题的偶数小题

用三角式及指数式表示下列复数，并求辐角的一般值：

$$(2) z = -\sqrt{3}i$$

$$\text{三角式: } \sqrt{3} \left(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2} \right)$$

在三角式这里要注意，即使 $\cos(-\pi/2) = 0$ ，也不应该省略不写。因为题目要的就是三角式，就是这个形式。

$$\text{指数式: } \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{辐角的一般值: } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta$$

最佳答案

设 $\theta = \theta_0 + 2k\pi, \theta_0 \in [0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$ ，则：

$$\text{三角式: } 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \left(\cos \frac{\pi - \theta_0}{2} + i \sin \frac{\pi - \theta_0}{2} \right)$$

$$\text{指数式: } 2 \sin \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\pi - \theta_0}{2}}$$

辐角的一般值： $\theta_0 = 0$ 时辐角无意义，除此之外为 $\frac{\pi - \theta_0}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

常见问题

多数人会这么做：

$$1 - \cos \theta + i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (2)$$

这看上去很像三角形形式 $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ 对吧？令 $r = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, $\phi = \frac{\theta}{2}$ 就可以了，是吗？

很抱歉，不对。这样做得到的是 $z = 2 \sin \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$

那么，考虑到 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ ，令 $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 是不是就可以了？

看上去没什么问题：

$$z = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \right) \quad (3)$$

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4)$$

所以， z 的模长就是 $r = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ ，而 z 的辐角就是 $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ ，辐角的一般值就是它加 $2k\pi$ 。

等等！模长好像应该是非负实数？

所以你知道上面的做法问题在哪了吧。

如果想要沿着这个方法做下去，应该讨论 θ 的取值范围，以确保你写出来的 $r(\cos \phi + i \sin \phi)$ 里面的 r 是一个非负实数。

还有很多人这么做：

首先计算模长：

$$|1 - \cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \quad (5)$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \quad (6)$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (7)$$

$$= 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \quad (8)$$

接着计算辐角的正切：

$$\tan \phi = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (9)$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (10)$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (11)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (12)$$

从而得到结论： $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

且不说这样做的时候分母 $1 - \cos \theta = 0$ 应该单独拿出来讨论，就问问你自己：能从

$$\tan \phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (13)$$

导出 $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 吗？能吗???

有的人不是算正切，而是算余弦：

$$\cos \phi = \frac{1 - \cos \theta}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad (14)$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad (15)$$

$$= |\sin \frac{\theta}{2}| \quad (16)$$

于是就说：

$$\phi = \arccos |\sin \frac{\theta}{2}| \quad (17)$$

同学们，这是对的吗??? 你真的知道反余弦函数是什么吗??

$x = \arccos y$ 只是 $y = \cos x$ 在 $x \in [0, \pi]$ 这个单调区间上的反函数，所以 $\arccos$ 的值只会取 $[0, \pi]$ ，但辐角又不是只有 $[0, \pi]$ 呀！

以上各种做法，为了正确得到 z 的辐角，必须对 θ 的取值范围做出讨论!!

不讨论 θ 的范围的，一律扣分。

如果你懒得讨论，请参考最佳答案的做法，那种做法就不需要讨论。

不过，在这里要说明，由于这题的特殊性，可能你自己都没意识到，如果你计算正弦：

$$\sin \phi = \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\sin \theta}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad (18)$$

从而说 $\phi = \arcsin \frac{\sin \theta}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，那倒是正确的。或者写： $\phi =$

$\arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 也是正确的。

因为此题中这个复数的实部 $1 - \cos \theta$ 总是非负的，所以它的辐角一定落在第一、第四象限，刚好跟反正弦、反正切函数的值域吻合。（写反余弦是不对的，因为反余弦反到的是第一、二象限）。

第 4 题的偶数小题

(2) 求解 $z^3 = -i$.

答案

$$i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

常规做法

这题放在这个教学阶段，最佳的做法是用老师上课讲过的指数形式把 z 和 $-i$ 都表示出来，然后令模和辐角分别相等，解出来模和辐角。

即：设 $z = re^{i\theta}$ ，则 $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$ ，而 $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ，所以说：

$$r^3 = 1 \quad (19)$$

$$3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

由此知

$$r = 1 \quad (21)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

所以

$$z = e^{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z} \quad (23)$$

写到这里，就已经完成了求解。

不过，这么写有点不太符合我们的习惯：

(1) 上面虽然写 $k \in \mathbb{Z}$ ，但实际上 z 只取 3 个值。对于 k 和 $k+3$ ， $e^{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}$ 的值总是一样的，所以写 $k=0,1,2$ 更合适。

(2) 因为 $-\frac{\pi}{6}$ 是个特殊的角， $e^{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}$ 是可以算出来的：

$i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ，写出来更清楚些（不写也是对的）。

任性的做法

这个题多数人做的是对的，但是有些人似乎没听课，做起来非常任性。

如果你没听课，不知道指数表示，非要设 $z = x + iy$ 来解 x, y ，我们来试试：由二项式定理（二项式定理只依赖于代数运算的交换律、结合律、分配律等规则，对复数也是成立的）

$$(x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \quad (24)$$

$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = -i \quad (25)$$

所以

$$x^3 - 3xy^2 = 0 \quad (26)$$

$$3x^2y - y^3 = -1 \quad (27)$$

解这个方程组，你也能得到三组解，也是正确的答案。

离谱的错误

有的人只给了一个解 $z = i$ ，我只能认为这样的同学没听课，也没看书。

漂亮的做法

$z^3 = -i$ 等价于 $z^3 + i = 0$ ，而 $z^3 + i = (z - i)(z^2 + iz - 1)$ 。

所以 $z = i$ 或者 $z^2 + iz - 1 = 0$, 后者是一个二次方程, 由二次方程求根公式得 $z = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$.

实际上这是利用了因式分解的技巧, 习题课上会详细讲讲它的基础知识。

第 7 题的偶数小题

$$(2) \text{ 求证: } \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}, 0 < \theta < \pi$$

最佳证明

证明. 由于 $(e^{i\theta})^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$, 所以式子左边是 $\sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k$ 的虚部. 利用等比数列前 n 项和公式得到:

$$\sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k = \frac{e^{i\theta}(1 - (e^{i\theta})^n)}{1 - e^{i\theta}} \quad (28)$$

分子分母同除以 $e^{i\theta/2}$,

$$\frac{e^{i\theta}(1 - (e^{i\theta})^n)}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \quad (29)$$

因为分母是纯虚数 $-i2 \sin \frac{\theta}{2}$, 所以为了得到整个分数的虚部, 只需关注分子的实部.

$$\operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\cos(\theta/2) - \cos(n + 1/2)\theta}{-i2 \sin(\theta/2)} \right) \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2} \cot(\theta/2) - \frac{\cos(n + 1/2)\theta}{2 \sin(\theta/2)} \quad (31)$$

证毕. □

这题利用等比数列求和公式是一个关键步骤, 多数人能想到这一点。后面的代数恒等变形也很关键, 但是稍微困难些。不过变形的途径不是唯一

的,有的人利用了三角和角公式,有的人用了和差化积,有的人用了积化和差。都行。

不要试图“伪证”(即省略关键步骤)。证明就是要将变形所依赖的公式交代清楚,如果不交代清楚,我只能认为你根本不知道能够这样变形的理由。

交代清楚变形的理由也不是事无巨细,而是要审时度势,把握分寸,详略得当。

像作业、考试这种场合,你最好在了解课程脉络的前提下猜测一下关键的采分点。

第 14 题

设 z_1, z_2 是两复数, 如果 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是实数, 证明 z_1 和 z_2 或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

最佳答案

证明. 设 $z_1 + z_2 = -b, z_1 z_2 = c$, 由题意 b, c 都是实数. 由二次方程根与系数的关系(或者说韦达定理), z_1, z_2 是关于 z 的实系数一元二次方程 $z^2 + bz + c = 0$ 的两个根. 由求根公式,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (32)$$

若 $b^2 - 4c \geq 0$, 则 z_1, z_2 都是实数, 否则 z_1, z_2 是一对共轭的复数. $\square$

常规做法

第 14 题, 很多同学是这样做的:

证明. 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$,

则 $y_1 + y_2 = 0, x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$.

如果 $y_2 = 0$, 则 $y_1 = 0$, z_1, z_2 都是实数.

如果 $y_2 \neq 0$, 则 $y_1 = -y_2$ 代入 $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$ 得 $(x_1 - x_2)y_2 = 0$,

故 $x_1 = x_2$, z_1, z_2 为共轭复数. 证毕. $\square$

这么做对吗？对，完全正确。但是如果把问题改成：

若 $z_1 + z_2 + z_3, z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, z_1z_2z_3$ 都是实数，请证明： z_1, z_2, z_3 或者都是实数，或者是一对共轭复数和一个实数。

你又该如何证明？那种设 $z = x + iy$ 然后列方程的方法还好用吗？

实际上，有更加一般的引理：

引理 1. 一元实系数多项式方程虚根成对共轭出现。

引理证明如下：

证明. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 是关于 x 的 n 次实系数多项式. 注意：当我们谈论实系数多项式时，我们的意思是系数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 都是实数，并不要求 x 是实数. 事实上，你可以让 x 是任何本身可进行乘法运算并且可以同 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 进行乘法运算的对象，甚至是方阵、求导算符。

如果 z 是方程的一个复数根（不论它是实数还是虚数），即 $f(z) = 0$ ，则 $\overline{f(z)} = 0$ ，

请注意，由于系数都是实数，所以

$$\overline{f(z)} = \overline{a_n} \overline{z}^n + \overline{a_{n-1}} \overline{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} \quad (33)$$

$$= a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 \quad (34)$$

$$= f(\overline{z}) \quad (35)$$

这就是说，从 $f(z) = 0$ 可推出 $\overline{f(z)} = 0$ ，从而推出 $f(\overline{z}) = 0$. 即：

只要 z 是方程的根，那么其共轭复数 $\overline{z}$ 也是方程的一个根！

如果 z 是实数，那么其共轭复数 $\overline{z} = z$ 就是它本身. 如果 z 不是实数，那么其共轭复数 $\overline{z}$ 就与 z 不同，只要其中有一个是 $f(x)$ 的根，则另一个也一定是。

这就是说：实系数一元多项式方程虚根成对共轭出现。 $\square$

第 16 题

下面复数列是否有极限？如果有则求出其极限值；如果没有则说明理由：

$$(1) \frac{3+4i}{6}, \left(\frac{3+4i}{6}\right)^2, \dots, \left(\frac{3+4i}{6}\right)^n, \dots$$

$$(2) 1, \frac{i}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{i}{4}, \frac{1}{5}, \frac{i}{6}, -\frac{1}{7}, -\frac{i}{8}, \dots$$

$$(3) 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$$

答案

(1)(2) 极限为 0。根据数列极限的定义，数列的模收敛于 0，则数列收敛于 0。

(1) 数列的通项是 $z_n = (\frac{3+4i}{6})^n$ ，关于复数的模有这样一个性质：

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (36)$$

从而

$$|z^n| = |z|^n \quad (37)$$

所以，对于上述 $z_n = (\frac{3+4i}{6})^n$ ， $|z_n| = |(\frac{3+4i}{6})^n| = |\frac{3+4i}{6}|^n = (\frac{5}{6})^n$ ，
所以当 $n \rightarrow \infty$ 时， $|z_n| \rightarrow 0$ ，所以 $z_n \rightarrow 0$ 。根本无需顾及辐角！无需顾及实部虚部！

其实这里暗暗用了一个简单的性质

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (38)$$

这里是 $\left| \frac{3+4i}{6} \right| = \frac{|3+4i|}{|6|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{6} = \frac{5}{6}$ 。

(2) 是类似的。 $|z_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 所以 $z_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。根本无需顾及辐角！无需顾及实部虚部！

(3) 无极限。

要说明 $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$ 没有极限的最好方式是：

子列 $1, 1, 1, 1, \dots$ 极限为 1，子列 $i, i, i, i, \dots$ 极限为 i ， $1 \neq i$ ，所以原数列没有极限。

这里用到了数列收敛的必要条件

定理 1. 若数列 z_n 收敛，则其任意子列都收敛，并且各个子列的极限相等。

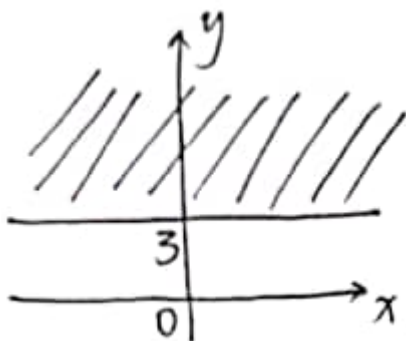
利用数列极限的定义，很容易证明这个定理。这是数学分析头一个月就讲过的内容。

第 19 题偶数小题

试在复平面上画出满足下列关系的点集的图形, 其中哪些关系确定的点集是区域? 它们的边界是什么?

正确答案

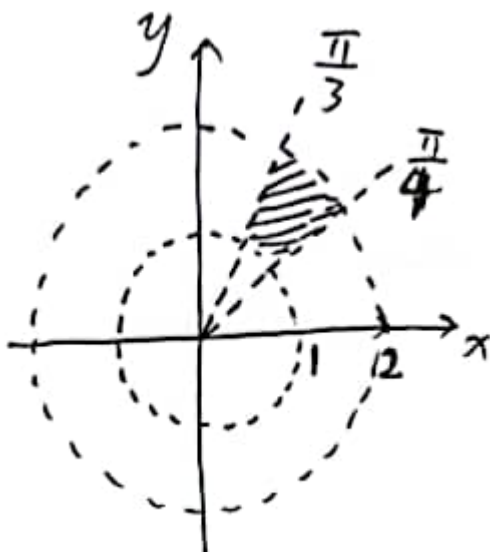
(2) $\operatorname{Im} z \geq 3$



不是区域, 因为它不是开集。

边界: 直线 $y = 3$ 。

(4) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 且 $1 < |z| < 2$



是区域。

边界：两段弧和两条线段，即：

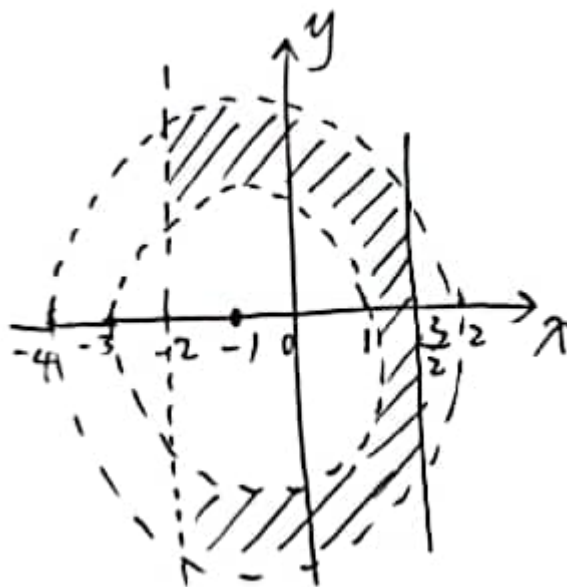
$$|z| = 1, \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3};$$

$$|z| = 2, \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3};$$

$$\arg z = \frac{\pi}{3}, 1 \leq |z| \leq 2;$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4}, 1 \leq |z| \leq 2。$$

$$(6) 2 < |z+1| < 3 \text{ 且 } -2 < \operatorname{Re} z \leq \frac{3}{2}$$



不是区域，因为它不是开集（ $x = \frac{3}{2}, 2 \leq |z+1| \leq 3$ 这里出了问题）。

边界：三条线段，三段弧，即：

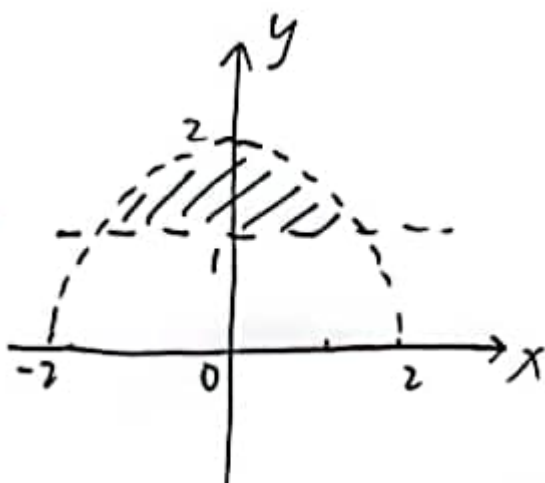
$$x = -2, 2 \leq |z+1| \leq 3;$$

$$x = \frac{3}{2}, 2 \leq |z+1| \leq 3;$$

$$|z+1| = 3, -2 \leq x \leq \frac{3}{2};$$

$$|z+1| = 2, -2 \leq x \leq \frac{3}{2}。$$

$$(8) \operatorname{Im} z > 1 \text{ 且 } |z| < 2$$



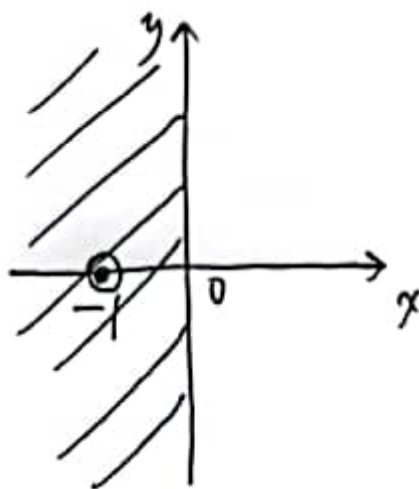
是区域。

边界：一条线段，一段弧，即：

$$y = 1, |z| \leq 2;$$

$$|z| = 2, y \geq 1.$$

$$(10) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| > 1.$$



区域中不包含 $z = -1$ ，因为它使得分母为 0.（很少有同学注意这一点）

是区域。

边界： y 轴和 $z = -1$ 。

请注意！这里的 $z = -1$ 也是边界！这一点，几乎全军覆没。习题课会详细讲这一点。

常见错误

要强调一点：边界有范围的，要注明。是线段，就不要只写一个直线。是弧，就不要写整个圆。

边界总是闭集，要带上端点。

第 22 题

$z\bar{z} + \bar{z} + z = 1$, 或者写成 $|z + 1| = \sqrt{2}$.

作业中的问题

要点 1. 三角式必须严格符合

$$r(\cos \theta + i \sin \theta), r \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \quad (39)$$

的形式.

请注意，在三角式中，即使遇到 $\cos(\pi/2), \sin(0)$ 之类值为 0 的东西，也不要省略。

三角式中模长需为非负实数。

在三角式中， i 需要和 $\sin$ 而不是 $\cos$ 放在一起。

$i \cos \theta + \sin \theta$ 不是三角式！

要点 2. 指数式必须严格符合

$$re^{i\theta}, r \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \quad (40)$$

的形式.

注意不要把 i 漏掉。

要点 3. 积累数学常识

第 14 题, 我们给的做法, 利用了根与系数的关系 (或者叫韦达定理) 以及一元实系数多项式方程虚根成对共轭出现, 这是基本且重要的数学常识, 各位同学应该了解一下。习题课上也会详细地讲。

另外一个基本常识也要强调一下: 一元复系数多项式有且只有 n 个复数根. 这个事实如此的重要, 以至于人们叫它代数基本定理。高斯给了它很多种证明, 在《复变函数》课程中, 我们将利用全纯函数的性质给出一个非常漂亮的证明。

这里要说明一下, n 个复数根未必互不相同, 就像我们中学学习二次多项式的时候一样, 可能会遇到重根, 我们是把重根按其重数计, 得到 n 个根的。

所以更准确的说法是: 一元复系数多项式可以分解为 n 个形如 $(x - x_i)$ 的一次因式的乘积, 其中 x_i 都是复数, $i = 1, 2, \dots, n$.

而根与系数的关系就是说:

定理 2. 对于一元 n 次多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, 如果它有 n 个根 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 那么有如下关系式:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (41)$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad (42)$$

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \quad (43)$$

$$\dots\dots \quad (44)$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad (45)$$

要点 4. 根据数列极限的定义, $|z_n| \rightarrow 0$ 就能说明 $z_n \rightarrow 0$, 不要多费笔墨求 z_n 的表达式.

要点 5. 求方程表示的几何图形时, 注意去掉导致分母为 0 等使得式子无意义的点.

要点 6. 什么是区域? 什么是集合的边界?

区域就是连通的开集, 这是在数学分析 B2 中首次提到的概念, 大家应该都学过. 连通, 直观地看就是没有断开为两部分. 开集, 直观地看就是边界都没有包含在集合内 (不是没有边界, 是不包含它自己的边界)。

习题课会详细讲：什么叫开集？什么叫连通？什么叫区域？

有的同学错误地以为，开集就没有边界。

比如，开的单位圆盘 $|z| < 1$ ，有没有边界？有！边界就是圆周 $|z| = 1$ 。

闭的单位圆盘 $|z| \leq 1$ ，边界也是圆周 $|z| = 1$ 。

开的单位圆盘只是不包含它的边界，而不是没有边界。

再问一问：平面上的一条线段有没有边界？有，它的边界就是它本身。

平面上的一个点有没有边界？也有，它的边界也是它本身。

你可能会觉得奇怪，线段、点怎么也有边界呢？其实，边界有统一的定义：

定义. 平面上一个集合 D 的边界一般记为 ∂D ，是指所有这样的点构成的集合：它的任何邻域既包含 D 中的点，也包含不在 D 中的点。

所以，不要傻傻地以为开集就没有边界了。

请你自己验证一下：属于单位圆周 $|z| = 1$ 的点，确实满足：它的任何邻域中既包含满足 $|z| < 1$ 的点，又包含不满足 $|z| < 1$ 的点。

第 19 题第 (10) 小问，请你自己根据边界的定义验证一下，如果从左半平面挖掉 $z = -1$ ，得到集合 $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0, z \neq -1\}$ 确实以 y 轴以及点 $z = -1$ 为边界。